Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

И. М. СОБОЛЬ

МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

АН
КНИГИ
НИКИТИНА

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 46

И. М. СОБОЛЬ

МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968

517.8 + 518
С 54
УДК 519.2

Соболь И. М.

С 54 Метод Монте-Карло. М., «Наука», 1968, 64 с. («Популярные лекции по математике», вып. 46), 10 к.

В книжке изложены основные приемы метода Монте-Карло (метода статистических испытаний). Приведены примеры весьма разнообразных задач, решаемых этим методом. Предназначена для инженеров, конструкторов, исследователей и научных работников, работающих в различных отраслях народного хозяйства (в науке, технике, промышленности, медицине, экономике, сельском хозяйстве, торговле и др.), и ставит своей целью подсказать, что в любой области деятельности встречаются задачи, которые можно рассчитывать методом Монте-Карло. К читателю предъявляются минимальные требования: умение дифференцировать и интегрировать (1-й курс втуза). Книжка может быть полезна также всем, кто желает впервые познакомиться с методом Монте-Карло.

2-2-2
147-68

517.8 + 518

Илья Меерович Соболь

Метод Монте-Карло

М., 1968 г., 64 стр. с илл.

Редакторы *М. М. Горячая* и *И. М. Овчинникова*

Техн. редактор *В. Н. Крючкова* Корректор *Н. В. Гераськина*

Сдано в набор 24/X 1967 г. Подписано к печати 21/II 1968 г. Бумага 84×108$^{1}/_{32}$. Физ. печ. л. 2. Условн. печ. л. 3,36. Уч.-изд. л. 2,90. Тираж 79 000 экз. Т-00260. Цена 10 коп. Заказ № 925.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР,
Измайловский проспект, 29.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Несколько лет назад мне было предложено прочесть две лекции о методе Монте-Карло для слушателей факультета вычислительной техники Общественного университета. Я согласился. И перед первой лекцией с ужасом узнал, что бóльшая часть слушателей не знакома с теорией вероятностей. Отступать было поздно. Пришлось на ходу включить в лекцию дополнительный раздел, знакомящий слушателей с основными теоретико-вероятностными понятиями.

Лекции эти повторялись в течение нескольких лет. Постепенно содержание их «устоялось». В настоящем издании сохранен также дополнительный раздел (§ 2), о котором хочется сказать несколько слов.

Каждому человеку приходилось употреблять слова «вероятность» и «случайная величина». Интуитивное представление о вероятности (как о частоте) более или менее соответствует истинному смыслу этого понятия. Но интуитивное представление о случайной величине, как правило, весьма далеко от математического определения. Поэтому в § 2 понятие вероятности предполагается известным и разъясняется только более сложное понятие случайной величины. Этот параграф не может заменить курса теории вероятностей: изложение здесь упрощенное и без доказательств. Но он дает некоторое представление о случайных величинах, достаточное для понимания простейших приемов метода Монте-Карло.

Основная цель настоящей книжки — подсказать специалистам самых различных направлений, что в их области деятельности встречаются задачи, которые можно решать методом Монте-Карло.

Задачи, рассмотренные в лекциях, достаточно просты и разнообразны. Но они, конечно, не могли охватить всех областей применения метода. Ограничусь только одним примером. В книжке ни слова нет о медицине. Однако методы § 7 позволяют рассчитывать дозы облучения при лучевой терапии. Имея программу для расчета поглощенного излучения в различных тканях тела, можно наиболее эффективным образом выбирать дозировку и направление облучения, следя за тем, чтобы не нанести вреда здоровым тканям.

В настоящую книжку включено все то, что читалось в лекциях, несколько подробнее изложены примеры и добавлен § 9.

И. Соболь

Москва, 1967 г.

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Общее представление о методе

Метод Монте-Карло — это численный метод решения математических задач при помощи моделирования случайных величин.

1.1. Происхождение метода Монте-Карло. Датой рождения метода Монте-Карло принято считать 1949 год, когда появилась статья под названием «The Monte Carlo method»*). Создателями этого метода считают американских математиков Дж. Неймана и С. Улама. В Советском Союзе первые статьи о методе Монте-Карло были опубликованы в 1955—1956 годах**).

Любопытно, что теоретическая основа метода была известна уже давно. Более того, некоторые задачи статистики рассчитывались иногда с помощью случайных выборок, то есть фактически методом Монте-Карло. Однако до появления электронных вычислительных машин *(ЭВМ)* этот метод не мог найти сколько-нибудь широкого применения, ибо моделировать случайные величины вручную — очень трудоемкая работа. Таким образом, возникновение метода Монте-Карло как весьма универсального численного метода стало возможным только благодаря появлению *ЭВМ*.

Само название «Монте-Карло» происходит от города Монте-Карло в княжестве Монако, знаменитого своим игорным домом. Дело в том, что одним из простейших механических приборов для получения случайных величин

*) Metropolis N., Ulam S., The Monte Carlo method, J. Amer. statistical assoc., 1949, 44, № 247, 335—341.

**) Это были статьи В. В. Чавчанидзе, Ю. А. Шрейдера, В. С. Владимирова.

является... рулетка. Об этом речь пойдет в § 3. Здесь же, пожалуй, стоит ответить на часто задаваемый вопрос: «Помогает ли метод Монте-Карло выигрывать в рулетку?» Нет, не помогает. И даже не занимается этим.

1.2. Пример. Для того чтобы читателю было более понятно, о чем пойдет речь, рассмотрим весьма простой пример. Предположим, что нам нужно вычислить площадь плоской фигуры S. Это может быть совсем произвольная фигура с криволинейной границей, заданная графически или аналитически, связная или состоящая из нескольких кусков. Пусть это будет фигура, изображенная на рис. 1, и предположим, что она вся расположена внутри единичного квадрата.

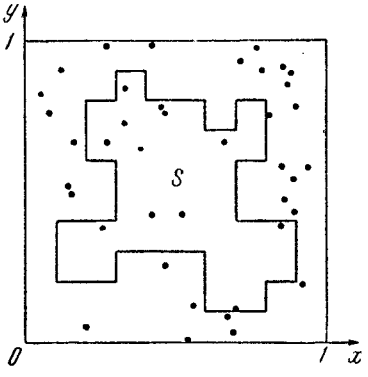

Рис. 1.

Выберем в квадрате N случайных точек. Обозначим через N' число точек, попавших при этом внутрь S. Геометрически очевидно, что площадь S приближенно равна отношению N'/N. Чем больше будет N, тем больше будет точность этой оценки.

В примере, изображенном на рис. 1, выбраны $N=40$ точек. Из них $N'=12$ точек оказались внутри S. Отношение $N'/N=12/40=0{,}30$, в то время как истинная площадь S равна 0,35 *).

1.3. Две особенности метода Монте-Карло. Первая особенность метода — простая структура вычислительного алгоритма. Как правило, составляется программа для осуществления одного случайного испытания (в примере из п. 1.2 надо выбрать случайную

*) На практике для вычисления площади плоской фигуры метод Монте-Карло не используют: для этого есть другие методы, хотя и более сложные, но зато обеспечивающие гораздо большую точность.

Однако указанный в нашем примере метод Монте-Карло позволяет столь же просто вычислять «многомерный объем» тела в многомерном пространстве. И в этом случае метод Монте-Карло часто оказывается единственным численным методом, дающим возможность решнть задачу.

точку в квадрате и проверить, принадлежит ли она S). Затем это испытание повторяется N раз, причем каждый опыт не зависит от всех остальных, и результаты всех опытов осредняются.

Поэтому иногда метод Монте-Карло называют *методом статистических испытаний.*

Вторая особенность метода: ошибка вычислений, как правило, пропорциональна $\sqrt{D/N}$, где D — некоторая постоянная, а N — число испытаний. Из этой формулы видно, что для того, чтобы уменьшить ошибку в 10 раз (иначе говоря, чтобы получить в ответе еще один верный десятичный знак), нужно увеличить N (то есть объем работы) в 100 раз.

Ясно, что добиться высокой точности на таком пути невозможно. Поэтому обычно говорят, что метод Монте-Карло особенно эффективен при решении тех задач, в которых результат нужен с небольшой точностью (5—10%).

Однако одну и ту же задачу можно решать различными вариантами метода Монте-Карло*), которым отвечают различные значения D. Во многих задачах удается значительно увеличить точность, выбрав способ расчета, которому соответствует значительно меньшее значение D.

1.4. Задачи, решаемые методом Монте-Карло. Во-первых, метод Монте-Карло позволяет моделировать любой процесс, на протекание которого влияют случайные факторы. Во-вторых, для многих математических задач, не связанных с какими-либо случайностями, можно искусственно придумать вероятностную модель (и даже не одну), позволяющую решать эти задачи. Собственно говоря, это и было сделано в примере из п. 1.2.

Таким образом, можно говорить о методе Монте-Карло как об универсальном методе решения математических задач.

Особенно интересно, что в некоторых случаях выгодно отказаться от моделирования истинного случайного процесса и вместо этого использовать искусственную модель. Такая ситуация рассмотрена в § 7.

---

*) В иностранной литературе теперь чаще пишут о методах Монте-Карло (во множественном числе), имея в виду, что одну и ту же задачу можно считать при помощи моделирования различных случайных величин.

1.5. Еще о примере. Вернемся к примеру из п. 1.2. Для расчета нам нужно было выбирать случайные точки в единичном квадрате. Как это сделать физически?

Представим такой эксперимент. Рис. 1 (в увеличенном масштабе) с фигурой S и квадратом повешен на стену в качестве мишени. Стрелок, находящийся на некотором расстоянии от стены, стреляет N раз, целясь в центр квадрата. Конечно, все пули не будут ложиться точно в центр: они пробьют на мишени N случайных точек*). Можно ли по этим точкам оценить площадь S?

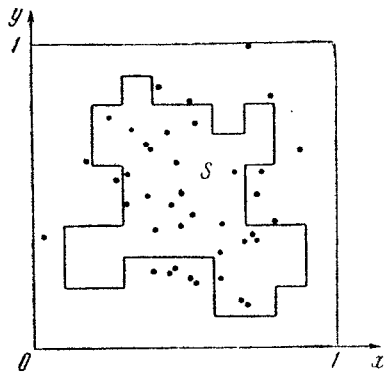

Рис. 2.

Результат такого опыта изображен на рис. 2. В этом опыте $N=40$, $N'=24$ и отношение $N'/N=0{,}60$, что превышает истинное значение площади (0,35) почти в два раза. Впрочем, и так ясно, что при очень высокой квалификации стрелка результат опыта будет очень плохим, так как почти все пули будут ложиться вблизи центра и попадут в S**).

Нетрудно сообразить, что наш метод вычисления площади будет справедлив только тогда, когда случайные точки будут не «просто случайными», а еще и «равномерно разбросанными» по всему квадрату. Чтобы придать этим словам точный смысл, необходимо познакомиться с определением случайных величин и некоторыми их свойствами. Эти сведения изложены в § 2 без доказательств. Читатель, знакомый с любым курсом теории вероятностей, может пропустить весь § 2, кроме п. 2.5.

*) Мы предполагаем, что стрелок не является чемпионом мира и удален на достаточно большое расстояние от мишени.

**) О том, как выбирались случайные точки на рис. 1 и 2, будет сказано в п. 4.5.

ГЛАВА 1

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§ 2. Случайные величины

Мы считаем, что понятие *вероятность* читателю более или менее известно, и переходим прямо к понятию *случайная величина.*

Слова «случайная величина» в обыденном смысле употребляют тогда, когда хотят подчеркнуть, что неизвестно, каким будет конкретное значение этой величины. Причем иногда за этими словами скрывается просто незнание, какова эта величина.

Однако математик употребляет эти же слова «случайная величина», вкладывая в них вполне определенный положительный смысл. Действительно, говорит он, мы не знаем, какое значение примет эта величина в данном конкретном случае, но мы знаем, какие значения она может принимать, и знаем, каковы вероятности тех или иных значений. На основании этих данных мы не можем точно предсказать результат одного испытания, связанного с этой случайной величиной, но можем весьма надежно предсказать совокупность результатов большого числа испытаний. Чем больше испытаний (как говорят, чем больше статистика), тем точнее будут наши предсказания.

Итак, чтобы задать случайную величину, надо указать, какие значения она может принимать и каковы вероятности этих значений.

2.1. Дискретные случайные величины. Случайная величина ξ называется *дискретной*, если она

может принимать дискретное множество значений x_1, x_2, ..., x_n *).

Дискретная случайная величина ξ определяется таблицей

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \qquad (T)$$

где x_1, x_2, ..., x_n — возможные значения величины ξ, а p_1, p_2, ..., p_n — соответствующие им вероятности. Точнее говоря, вероятность того, что случайная величина ξ примет значение x_i (обозначим ее через $P\{\xi = x_i\}$), равна p_i:

$$P\{\xi = x_i\} = p_i.$$

Таблица (T) называется *распределением случайной величины.*

Числа x_1, x_2, ..., x_n могут быть, вообще говоря, любыми. Однако вероятности p_1, p_2, ..., p_n должны удовлетворять двум условиям:

а) все p_i положительны:

$$p_i > 0; \qquad (1)$$

б) сумма всех p_i равна 1:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1. \qquad (2)$$

Последнее условие означает, что ξ обязана в каждом случае принять одно из значений x_1, x_2, ..., x_n.

Математическим ожиданием случайной величины ξ называется число

$$\mathsf{M}\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \qquad (3)$$

Чтобы выяснить физический смысл этой величины, запишем ее в следующем виде:

$$\mathsf{M}\xi = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}.$$

*) В теории вероятностей рассматриваются также дискретные случайные величины, которые могут принимать бесконечное число значений.

Отсюда видно, что $\mathsf{M}\xi$ — это *среднее значение* величины ξ, причем более вероятные значения x_i входят в сумму с бо́льшими весами *).

Отметим основные свойства математического ожидания: если c — какая-нибудь не случайная величина, то

$$\mathsf{M}(\xi + c) = \mathsf{M}\xi + c, \tag{4}$$

$$\mathsf{M}(c\xi) = c\mathsf{M}\xi; \tag{5}$$

если ξ и η — две любые случайные величины, то

$$\mathsf{M}(\xi + \eta) = \mathsf{M}\xi + \mathsf{M}\eta. \tag{6}$$

Дисперсией случайной величины ξ называется число

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}[(\xi - \mathsf{M}\xi)^2]. \tag{7}$$

Следовательно, дисперсия $\mathsf{D}\xi$ — это математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины ξ от ее среднего значения $\mathsf{M}\xi$. Очевидно, всегда $\mathsf{D}\xi > 0$.

Математическое ожидание и дисперсия — важнейшие числовые характеристики случайной величины ξ. Каково их практическое значение?

Если мы будем наблюдать величину ξ много раз и получим значения $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ (каждое из которых будет равно одному из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$), то среднее арифметическое от этих значений будет близко к $\mathsf{M}\xi$

$$\frac{1}{N}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_N) \approx \mathsf{M}\xi. \tag{8}$$

А дисперсия $\mathsf{D}\xi$ характеризует разброс этих значений около среднего $\mathsf{M}\xi$.

---

*) Осреднение с весами очень часто встречается в самых различных областях науки. Например, в механике: если в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (на оси Ox) расположены массы $m_1, m_2, \ldots, m_n$, то абсцисса центра тяжести этой системы вычисляется по формуле

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Конечно, в этом случае сумма всех масс не обязана равняться единице.

Формулу (7) для дисперсии можно преобразовать с помощью формул (4)—(6):

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}\,[\xi^2 - 2\mathsf{M}\xi \cdot \xi + (\mathsf{M}\xi)^2] = \mathsf{M}\,(\xi^2) - 2\mathsf{M}\xi \cdot \mathsf{M}\xi + (\mathsf{M}\xi)^2,$$

откуда

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}\,(\xi^2) - (\mathsf{M}\xi)^2. \tag{9}$$

Вычислять дисперсию по формуле (9) обычно проще, чем по формуле (7).

Отметим основные свойства дисперсии: если c — какая-нибудь не случайная величина, то

$$\mathsf{D}\,(\xi + c) = \mathsf{D}\xi, \tag{10}$$

$$\mathsf{D}\,(c\xi) = c^2\mathsf{D}\xi. \tag{11}$$

Важную роль в теории вероятностей играет понятие независимости случайных величин. В действительности это — довольно сложное понятие, но в простейших случаях оно весьма очевидно *).

Для независимых случайных величин ξ и η справедливы следующие соотношения:

$$\mathsf{M}\,(\xi\eta) = \mathsf{M}\xi \cdot \mathsf{M}\eta, \tag{12}$$

$$\mathsf{D}\,(\xi + \eta) = \mathsf{D}\xi + \mathsf{D}\eta. \tag{13}$$

Пример. Рассмотрим случайную величину $\varkappa$ с распределением

$$\varkappa = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, реализацией этой величины можно считать число очков, выпадающих на игральной кости: любое значение одинаково вероятно. Вычислим математическое ожидание и дисперсию $\varkappa$. По формуле (3)

$$\mathsf{M}\varkappa = \frac{1}{6}\,(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3{,}5.$$

По формуле (9)

$$\mathsf{D}\varkappa = \mathsf{M}\,(\varkappa^2) - (\mathsf{M}\varkappa)^2 = \frac{1}{6}\,(1^2 + 2^2 + \ldots + 6^2) - (3{,}5)^2 = 2{,}917.$$

*) Допустим, что кроме величины ξ мы наблюдаем еще за одной случайной величиной η. Если распределение величины ξ не меняется от того, что нам уже известно значение, которое приняла величина η, то естественно считать, что ξ от η не зависит.

Пример. Рассмотрим случайную величину θ с распределением

$$\theta = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Реализацией этой величины можно считать игру в орлянку с условием, что, например, орел — это 3 очка, а решетка — 4 очка. В этом случае

$$M\theta = 0{,}5 \cdot 3 + 0{,}5 \cdot 4 = 3{,}5;$$
$$D\theta = 0{,}5\,(3^2 + 4^2) - (3{,}5)^2 = 0{,}25.$$

Мы видим, что $M\theta = M\varkappa$, но $D\theta < D\varkappa$. Это можно было легко предвидеть, так как значения θ могут отличаться от 3,5 только на $\pm 0{,}5$, в то время как в значениях $\varkappa$ разброс может достигать $\pm 2{,}5$.

2.2. Непрерывные случайные величины. Предположим, что на плоскости в начале координат расположено некоторое количество радия. При распаде каждого атома радия из него вылетает α-частица. Направление ее будем характеризовать углом ψ (рис. 3). Так как и теоретически, и практически возможны любые направления вылета, то эта случайная величина может принимать любое значение от 0 до 2π.

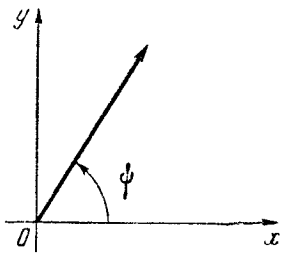

Рис. 3.

Мы будем называть случайную величину ξ *непрерывной*, если она может принимать любое значение из некоторого интервала (a, b).

Непрерывная случайная величина ξ определяется заданием интервала (a, b), содержащего возможные значения этой величины, и функции $p(x)$, которая называется *плотностью вероятностей* случайной величины ξ (или *плотностью распределения* ξ).

Физический смысл $p(x)$ следующий: пусть (a', b') — произвольный интервал, содержащийся в (a, b) (то есть $a \leqslant a'$, $b' \leqslant b$). Тогда вероятность того, что ξ окажется в интервале (a', b'), равна интегралу

$$P\{a' < \xi < b'\} = \int_{a'}^{b'} p(x)\,dx. \qquad (14)$$

На рис. 4 заштрихованная площадь равна значению интеграла (14).

Множество значений ξ может быть любым интервалом. Возможен даже случай $a=-\infty$, а также $b=\infty$.

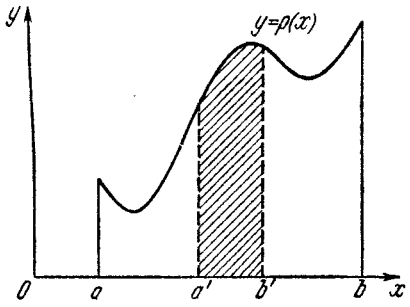

Рис. 4.

Однако плотность $p(x)$ должна удовлетворять двум условиям, аналогичным условиям (1) и (2) для дискретных величин:

а) плотность $p(x)$ положительна:

$$p(x)>0; \tag{15}$$

б) интеграл от плотности $p(x)$ по всему интервалу (a, b) равен 1:

$$\int_a^b p(x)\,dx=1. \tag{16}$$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины называется число

$$\mathrm{M}\xi=\int_a^b xp(x)\,dx. \tag{17}$$

Смысл этой характеристики такой же, как в случае дискретной случайной величины. В самом деле, так как

$$\mathrm{M}\xi=\frac{\int_a^b xp(x)\,dx}{\int_a^b p(x)\,dx},$$

то легко видеть, что это есть среднее значение ξ: ведь значеннем ξ может быть любое число x из интервала (a, b), которое входит в интеграл с весом $p(x)$*).

Все изложенное в п. 2.1 от формулы (4) и до формулы (13) включительно справедливо также для непрерывных случайных величин: и определение дисперсии (7), и формула (9) для ее вычисления, и все свойства $\mathbf{M}\xi$ и $\mathbf{D}\xi$. Повторять мы их не будем.

Укажем только еще одну формулу для математического ожидания случайной функции. Пусть по-прежнему случайная величина ξ имеет плотность вероятностей $p(x)$. Выберем произвольную непрерывную функцию $f(x)$ и рассмотрим случайную величину $\eta=f(\xi)$, которую иногда называют *случайной функцией*. Можно доказать, что

$$\mathbf{M}f(\xi)=\int_a^b f(x)\,p(x)\,dx. \quad (18)$$

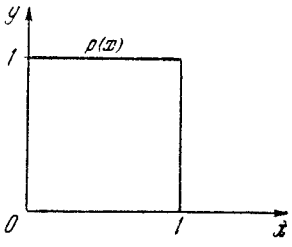

Рис. 5.

Подчеркнем, что, вообще говоря, $\mathbf{M}f(\xi)\neq f(\mathbf{M}\xi)$.

Случайная величина γ, определенная в интервале $(0, 1)$ и имеющая плотность $p(x)=1$, называется *равномерно распределенной в* $(0, 1)$ (рис. 5).

В самом деле, какой бы интервал (a', b') внутри $(0, 1)$ мы ни взяли, вероятность того, что γ попадет в (a', b'), равна

$$\int_{a'}^{b'} p(x)\,dx=b'-a',$$

---

*) И в этом случае можно указать на аналогичную формулу из механики: если линейная плотность стержня $a\leqslant x\leqslant b$ равна $\rho(x)$, то абсцисса центра тяжести стержня вычисляется по формуле

$$\bar{x}=\frac{\int_a^b x\rho(x)\,dx}{\int_a^b \rho(x)\,dx}.$$

то есть длине этого интервала. В частности, если мы разделим (0, 1) на любое число интервалов равной длины, то вероятность попадания γ в любой из этих интервалов будет одна и та же.

Легко вычислить, что

$$\mathsf{M}\gamma = \int_0^1 xp(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2};$$

$$\mathsf{D}\gamma = \int_0^1 x^2 p(x)\,dx - (\mathsf{M}\gamma)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Со случайной величиной γ мы еще не раз встретимся в дальнейшем.

2.3. Нормальные случайные величины. *Нормальной* (или *гауссовской*) случайной величиной называется случайная величина ζ, определенная на всей оси $(-\infty, \infty)$ и имеющая плотность

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (19)$$

где a и $\sigma > 0$ — числовые параметры *).

Параметр a не влияет на форму кривой $p(x)$: изменение его приводит лишь к сдвигу кривой вдоль оси x. Однако при изменении σ форма кривой меняется. В самом деле, легко видеть, что

$$\max p(x) = p(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

Если уменьшать σ, то $\max p(x)$ будет возрастать. Однако вся площадь под кривой $p(x)$ по условию (16) равна 1. Поэтому кривая будет вытягиваться вверх в окрестности $x=a$, но убывать при всех достаточно больших значениях x. На рис. 6 построены две нормальные плотности, соответствующие $a=0$, $\sigma=1$ и $a=0$, $\sigma=0{,}5$. (Еще одна нормальная плотность построена на рис. 21, см. ниже, стр. 43.)

Можно доказать, что

$$\mathsf{M}\zeta = a, \qquad \mathsf{D}\zeta = \sigma^2.$$

*) σ — это число, а не случайная величина. Мы использовали греческую букву, так как это обозначение общепринято.

Нормальные случайные величины очень часто встречаются при исследовании самых различных по своей природе вопросов. О причине этого будет сказано несколько ниже. Например, ошибка измерения δ, как правило, представляет собой нормальную случайную величину.

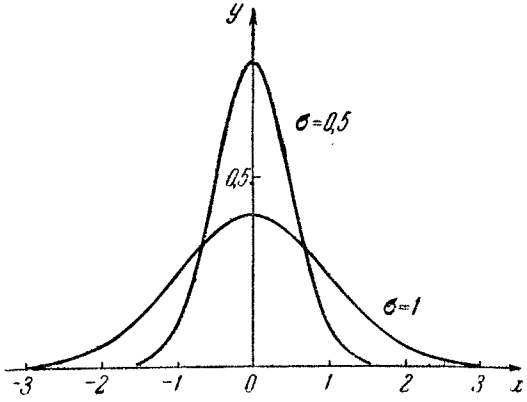

Рис. 6.

Если систематической ошибки измерения нет, то $a = M\delta = 0$. А величина $\sigma = \sqrt{D\delta}$, называемая средней квадратичной погрешностью, характеризует погрешность метода измерения.

Правило «трех сигм». Нетрудно вычислить, что, каковы бы ни были a и σ в (19),

$$\int_{a-3\sigma}^{a+3\sigma} p(x)\,dx = 0{,}997.$$

Из (14) вытекает, что

$$P\{a - 3\sigma < \zeta < a + 3\sigma\} = 0{,}997. \qquad (20)$$

Вероятность 0,997 настолько близка к 1, что иногда последнюю формулу интерпретируют так: при одном испытании практически невозможно получить значение ζ, отличающееся от $M\zeta$ больше чем на 3σ.

2.4. Центральная предельная теорема теории вероятностей. Эта замечательная теорема

была впервые сформулирована Лапласом. Обобщением этой теоремы занимались многие выдающиеся математики, в том числе П. Л. Чебышев, А. А. Марков и А. М. Ляпунов. Доказательство ее достаточно сложно.

Рассмотрим N одинаковых независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$. Иначе говоря, плотности вероятностей этих величин совпадают. Следовательно, их математические ожидания и дисперсии также совпадают.

Обозначим

$$\mathsf{M}\xi_1 = \mathsf{M}\xi_2 = \ldots = \mathsf{M}\xi_N = m,$$

$$\mathsf{D}\xi_1 = \mathsf{D}\xi_2 = \ldots = \mathsf{D}\xi_N = b^2.$$

Обозначим через ρ_N сумму всех этих величин:

$$\rho_N = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_N.$$

Из формул (6) и (13) следует, что

$$\mathsf{M}\rho_N = \mathsf{M}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_N) = Nm,$$

$$\mathsf{D}\rho_N = \mathsf{D}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_N) = Nb^2.$$

Рассмотрим теперь нормальную случайную величину ζ_N с такими же параметрами: $a = Nm$, $\sigma^2 = Nb^2$.

Теорема. *Плотность суммы ρ_N приближается к плотности нормальной величины ζ_N, когда $N \to \infty$:*

$$\lim_{N\to\infty} \left| p_{\rho_N}(x) - p_{\zeta_N}(x) \right| = 0.$$

Физический смысл этой теоремы очевиден: сумма ρ_N большого числа одинаковых случайных величин приблизительно нормальна $\left(p_{\rho_N}(x) \approx p_{\zeta_N}(x)\right)$.

На самом деле эта теорема справедлива при гораздо более широких условиях: все слагаемые $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ не обязаны быть одинаковыми и независимыми; существенно только, чтобы отдельные слагаемые не играли слишком большой роли в сумме.

Именно эта теорема объясняет, почему нормальные случайные величины так часто встречаются в природе. В самом деле, каждый раз, когда мы сталкиваемся с суммарным воздействием большого числа незначительных случайных факторов, результирующая случайная величина оказывается нормальной.

Например, отклонение артиллерийского снаряда от цели почти всегда оказывается нормальной случайной величиной, так как оно зависит и от метеорологических условий на разных участках траектории, и от многих других факторов.

2.5. Общая схема метода Монте-Карло. Допустим, что нам требуется вычислить какую-то неизвестную величину m. Попытаемся придумать такую случайную величину ξ, чтобы $\mathbf{M}\xi = m$. Пусть при этом $\mathbf{D}\xi = b^2$.

Рассмотрим N случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$, распределения которых совпадают с распределением ξ. Если N достаточно велико, то согласно теореме из п. 2.4 распределение суммы $\rho_N = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_N$ будет приблизительно нормальным с параметрами $a = Nm$, $\sigma^2 = Nb^2$. Из (20) следует, что

$$P\{Nm - 3b\sqrt{N} < \rho_N < Nm + 3b\sqrt{N}\} \approx 0{,}997.$$

Если мы поделим неравенство, стоящее в фигурной скобке, на N, то получим эквивалентное неравенство и вероятность его останется такой же:

$$P\left\{m - \frac{3b}{\sqrt{N}} < \frac{\rho_N}{N} < m + \frac{3b}{\sqrt{N}}\right\} \approx 0{,}997.$$

Последнее соотношение перепишем в несколько ином виде:

$$P\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\xi_j - m\right| < \frac{3b}{\sqrt{N}}\right\} \approx 0{,}997. \qquad (21)$$

Это — чрезвычайно важное для метода Монте-Карло соотношение. Оно дает нам и метод расчета m, и оценку погрешности.

В самом деле, найдем N значений случайной величины ξ *). Из (21) видно, что среднее арифметическое

*) Все равно, находить ли один раз по одному значению каждой из величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ или найти N значений одной величины ξ, так как все эти случайные величины совпадают (имеют одно и то же распределение).

этих значений будет приближенно равно m. С большой вероятностью ошибка такого приближения не превосходит величины $3b/\sqrt{N}$. Очевидно, эта ошибка стремится к нулю с ростом N.

§ 3. Получение случайных величин на *ЭВМ*

Сама постановка вопроса «получение случайных величин на *ЭВМ*» иногда вызывает недоумение: ведь все, что делает машина, должно быть заранее запрограммировано; откуда же может появиться случайность?

В этом вопросе и в самом деле есть некоторые трудности, но они относятся скорее к философии, так что мы на них останавливаться не будем.

На всякий случай заметим только, что случайные величины, о которых шла речь в § 2, — это идеальные математические понятия. Вопрос о том, можно ли с их помощью описать какое-либо явление природы, решается опытом. Такое описание всегда является приближенным. Более того, случайная величина, которая вполне удовлетворительно описывает какую-то физическую величину в одном круге явлений, может оказаться плохой характеристикой этой же величины при исследовании других явлений.

Точно так же дорога, которую на карте страны можно считать прямой (идеальной математической прямой «без ширины»), становится полосой с изгибами на крупномасштабном плане населенного пункта...

Обычно различают три способа получения случайных величин: таблицы случайных чисел, генераторы случайных чисел и метод псевдослучайных чисел.

3.1. Таблицы случайных чисел. Проделаем следующий опыт. Напишем на десяти одинаковых бумажках цифры 0, 1, 2, ..., 9. Положим эти бумажки в шапку, перемешаем и будем извлекать оттуда по одной бумажке, каждый раз возвращая ее назад и снова перемешивая все бумажки. Полученные таким образом цифры запишем в виде таблицы, подобной таблице А в конце книги на стр. 62 (в таблице А цифры для удобства объединены в группы по 5 штук).

Такая таблица называется *таблицей случайных чисел*, хотя правильнее было бы назвать ее таблицей слу-

чайных цифр. Можно ввести ее в запоминающее устройство *ЭВМ*. И в ходе расчета, когда нам понадобится значение случайной величины с распределением

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & 9 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & \dots & 0{,}1 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

мы будем брать очередную цифру из этой таблицы.

Самая большая из опубликованных таблиц случайных чисел содержит 1 000 000 цифр *). Конечно, она составлялась с помощью более современной техники, чем шапка: была сконструирована специальная рулетка с использованием электроники. Простейшая схема такой рулетки приведена на рис. 7 (вращающийся диск резко останавливается и выбирается та цифра, на которую указывает неподвижная стрелка).

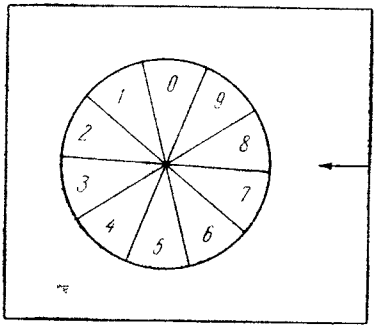

Рис. 7.

Необходимо заметить, что составить хорошую таблицу случайных чисел не так просто, как может показаться. Любой реальный физический прибор вырабатывает случайные величины с распределением, несколько отличающимся от идеального распределения (22). К тому же в ходе опыта возможны ошибки (например, одна из бумажек на некоторое время может пристать к подкладке). Поэтому составленные таблицы тщательно проверяются с помощью специальных статистических тестов: не противоречат ли те или иные свойства группы чисел гипотезе о том, что эти числа — значения случайной величины (22).

Приведем один из простейших тестов. Рассмотрим таблицу, содержащую N цифр. Пусть число нулей в этой таблице ν_0, число единиц ν_1, число двоек ν_2 и т. д. Вычислим сумму

$$\sum_{i=0}^{9} (\nu_i - 0{,}1N)^2.$$

*) RAND Corporation, A million random digits with 100 000 normal deviates, The Free Press, 1955.

Теория вероятностей позволяет предсказать, в каких пределах может лежать эта сумма: она не должна быть слишком большой (так как математическое ожидание каждого из ν_i равно $0{,}1N$), но не должна быть и слишком малой (так как это означало бы «слишком закономерное» распределение значений).

Таблицы случайных чисел используются только при расчетах по методу Монте-Карло вручную. Дело в том, что все *ЭВМ* обладают сравнительно малой внутренней памятью, и большая таблица туда не помещается. Хранить же таблицу во внешней памяти и постоянно обращаться к ней за числами — это очень замедляет счет.

Однако не исключено, что со временем возможности памяти у *ЭВМ* резко вырастут, и тогда таблицы случайных чисел станут весьма практичными.

3.2. Генераторы случайных чисел. Казалось бы, что упоминавшуюся в 3.1 рулетку можно присоединить к вычислительной машине и по мере надобности вырабатывать случайные числа. Однако любой механический прибор будет слишком медленным для *ЭВМ*. Поэтому в качестве генераторов случайных величин чаще всего используют шумы в электронных лампах: если за некоторый фиксированный промежуток времени Δt уровень шума превысил заданный порог четное число раз, то записывается нуль, а если нечетное число раз, то записывается единица *).

На первый взгляд это очень удобный способ. Пусть m таких генераторов работают параллельно, работают все время и засылают случайные нули и единицы во все двоичные разряды специальной ячейки. Каждый такт — одно m-разрядное число. В любой момент счета можно обратиться к этой ячейке и взять оттуда значение случайной величины γ, равномерно распределенной в интервале (0, 1). Конечно, значение приближенное, записанное в форме m-разрядной двоичной дроби $0, \alpha_{(1)}\alpha_{(2)} \ldots \alpha_{(m)}$, где каждая из величин $\alpha_{(i)}$ имитирует случайную величину с распределением

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

*) Существуют и более совершенные конструкции.

Однако и этот метод не свободен от недостатков. Во-первых, трудно проверить «качество» вырабатываемых чисел. Проверки приходится делать периодически, так как из-за каких-либо неисправностей может возникнуть так называемый «дрейф распределения» (то есть нули и единицы в каком-либо из разрядов станут появляться не одинаково часто). Во-вторых, обычно все расчеты на *ЭВМ* проводят дважды, чтобы исключить возможность случайного сбоя. Но воспроизвести те же случайные числа невозможно, если их по ходу счета не запоминать, А если их запоминать, то мы снова приходим к случаю таблиц.

Датчики такого типа, несомненно, окажутся полезными тогда, когда будут строиться специализированные *ЭВМ* для решения задач методом Монте-Карло. А для универсальных *ЭВМ*, на которых расчеты с помощью случайных чисел проводятся лишь изредка, содержать и эксплуатировать специальное устройство просто не экономично. Лучше использовать так называемые *псевдослучайные числа.*

3.3. Псевдослучайные числа. Поскольку «качество» используемых случайных чисел проверяется с помощью специальных тестов, можно не интересоваться тем, как эти числа получены: лишь бы они удовлетворяли принятой системе тестов. Можно даже попытаться вычислять их по заданной формуле. Но, конечно, это должна быть весьма хитрая формула.

Числа, получаемые по какой-либо формуле и имитирующие значения случайной величины γ, называются *псевдослучайными числами.* Под словом «имитирующие» подразумевается, что эти числа удовлетворяют ряду тестов так, как если бы они были значениями этой случайной величины.

Первый алгоритм для получения псевдослучайных чисел был предложен Дж. Нейманом. Он называется *методом середины квадратов.* Поясним его на примере.

Пусть задано 4-значное целое число $n_1 = 9876$. Возведем его в квадрат. Получим, вообще говоря, 8-значное число $n_1^2 = 97\,535\,376$. Выберем четыре средние цифры из этого числа и обозначим $n_2 = 5353$.

Затем возведем n_2 в квадрат $(n_2^2 = 28\,654\,609)$ и снова извлечем 4 средние цифры. Получим $n_3 = 6546$.

Далее, $n_3^2 = 42\,850\,116$, $n_4 = 8501$; $n_4^2 = 72\,267\,001$, $n_5 = 2670$; $n_5^2 = 07\,128\,900$, $n_6 = 1289$ и т. д.

В качестве значений γ предлагалось использовать значения 0,9876; 0,5353; 0,6546; 0,8501; 0,2670; 0,1289 и т. д. *).

Но этот алгоритм не оправдал себя: получалось больше чем нужно малых значений. Поэтому разными исследователями были разработаны другие алгоритмы. Некоторые из них используют особенности конкретных *ЭВМ*. В качестве примера рассмотрим один из таких алгоритмов, применяемый на *ЭВМ Стрела*.

Пример **). *Стрела* — трехадресная *ЭВМ* с плавающей запятой. Ячейка, в которую записывается число x, состоит из 43 двоичных разрядов (рис. 8). Машина работает с двоичными числами в

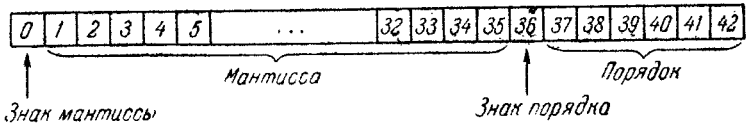

Рис. 8.

нормализованной форме: $x = \pm q \cdot 2^{\pm p}$, где p — порядок числа, q — мантисса. В j-м разряде ячейки может стоять нуль или единица; обозначим эту величину ε_j. Тогда

$$q = \frac{\varepsilon_1}{2^1} + \frac{\varepsilon_2}{2^2} + \ldots + \frac{\varepsilon_{35}}{2^{35}}, \quad p = \varepsilon_{37}2^5 + \varepsilon_{38}2^4 + \ldots + \varepsilon_{42}2^0.$$

Условие нормализации $0{,}5 \leqslant q < 1$ означает, что ε_1 всегда равно 1. Знак «+» изображается нулем, знак «—» — единицей.

Число γ_{k+1} получается из числа γ_k тремя операциями:

1) умножаем γ_k на большую константу, обычно 10^{17};

2) изображение произведения $10^{17}\gamma_k$ сдвигаем на 7 разрядов влево (так что первые 7 разрядов произведения пропадают, а в разрядах с 36-го по 42-й оказываются нули);

3) берем абсолютную величину полученного числа (при этом число нормализуется); это и будет γ_{k+1}.

Если начинать с $\gamma_0 = 1$, то таким процессом получаются более 80 000 различных чисел γ_k, затем в последовательности возникает

---

*) Этот алгоритм можно записать в виде формулы $n_{k+1} = F(n_k)$, где F означает совокупность операций, которые надо проделать над числом n_k, чтобы получить n_{k+1}. Число n_1 задается. Псевдослучайные числа $\gamma_k = 10^{-4} n_k$.

) См. И. М. Соболь, Псевдослучайные числа для машины *Стрела*, Теория вероятн. и ее примен., **3, № 2, 1958, 205—211.

период, и числа начинают повторяться. Различные проверки первых 50 000 чисел дали вполне удовлетворительные результаты. Эти числа неоднократно использовались при решении самых разнообразных задач.

Достоинства метода псевдослучайных чисел довольно очевидны. Во-первых, на получение каждого числа затрачивается всего несколько простых операций, так что скорость генерирования случайных чисел имеет тот же порядок, что скорость работы *ЭВМ*. Во-вторых, программа занимает всего несколько ячеек накопителя. В-третьих, любое из чисел γ_k может быть легко воспроизведено. В-четвертых, нужно лишь один раз проверить «качество» такой последовательности, затем ее можно много раз безбоязненно использовать при расчете сходных задач.

Единственный недостаток метода — ограниченность «запаса» псевдослучайных чисел. Однако существуют способы, позволяющие получать гораздо больше чисел. В частности, можно менять начальные числа γ_0.

Подавляющее большинство расчетов по методу Монте-Карло в настоящее время осуществляется с использованием псевдослучайных чисел.

§ 4. Преобразования случайных величин

При решении различных задач приходится моделировать различные случайные величины. На ранних этапах использования метода Монте-Карло некоторые вычислители пытались для нахождения каждой случайной величины строить свою рулетку. Например, чтобы находить значения случайной величины с распределением

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}125 & 0{,}125 \end{pmatrix}, \qquad (22')$$

можно использовать рулетку, изображенную на рис. 9, действующую точно так же, как рулетка, изображенная на рис. 7, но с неравномерными делениями, пропорциональными p_i.

Однако это оказалось совершенно не нужным: значения любой случайной величины можно получить путем преобразования значений одной какой-либо (так

сказать «стандартной») случайной величины. Обычно роль такой величины играет случайная величина γ, равномерно распределенная в (0, 1). Как получать значения γ, мы уже знаем.

Условимся процесс нахождения значения какой-либо случайной величины ξ путем преобразования одного или нескольких значений γ называть *разыгрыванием* случайной величины ξ.

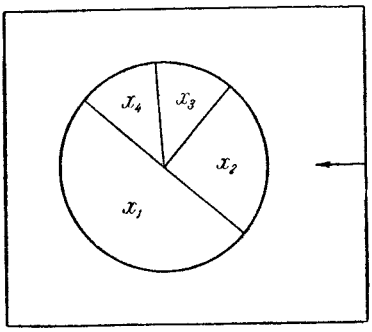

Рис. 9.

4.1. Разыгрывание дискретной случайной величины. Допустим, что нам нужно получать значения случайной величины ξ с распределением

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим интервал $0 < y < 1$ и разобьем его на n интервалов, длины которых равны $p_1, p_2, \dots, p_n$. Координатами точек деления, очевидно, будут $y = p_1$, $y = p_1 + p_2$, $y = p_1 + p_2 + p_3$, ..., $y = p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}$.

Полученные интервалы занумеруем цифрами 1, 2, ..., n (рис. 10). На этом приготовления к розыгрышу ξ

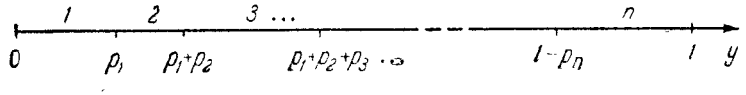

Рис. 10.

заканчиваются. Каждый раз, когда нам надо будет «поставить опыт» и разыграть значение ξ, мы будем выбирать значение γ и строить точку $y = \gamma$. Если эта точка попадет в интервал с номером i, то будем считать, что $\xi = x_i$ (в этом опыте).

Доказать законность такой процедуры совсем легко. В самом деле, так как случайная величина γ равномерно распределена в (0, 1), то вероятность того, что γ ока-

жется в некотором интервале, равна длине этого интервала. Значит,

$$P\{0 < \gamma < p_1\} = p_1,$$
$$P\{p_1 < \gamma < p_1 + p_2\} = p_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$P\{p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} < \gamma < 1\} = p_n.$$

Согласно нашей процедуре $\xi = x_i$ тогда, когда

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{i-1} < \gamma < p_1 + p_2 + \dots + p_i,$$

а вероятность этого равна p_i.

Конечно, на *ЭВМ* можно обойтись без рис. 10. Предположим, что числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ расположены в ячейках

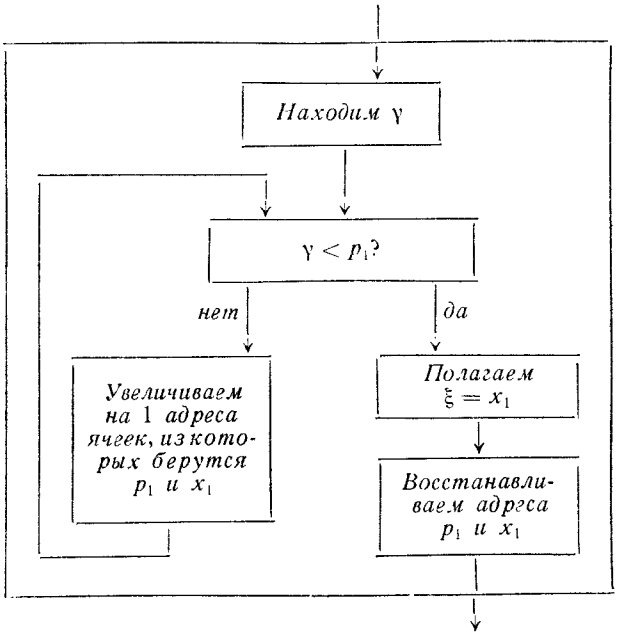

Рис. 11.

накопителя подряд, а вероятности p_1, p_1+p_2, $p_1+p_2+p_3$, ..., 1 — тоже подряд. Блок-схема подпрограммы для розыгрыша ξ приведена на рис. 11.

Пример. Разыграть 10 значений случайной величины θ с распределением

$$\theta = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0{,}58 & 0{,}42 \end{pmatrix}.$$

В качестве значений γ выберем пары цифр из таблицы А на стр. 62, умноженные на 0,01 *). Итак, $\gamma = 0{,}86;\ 0{,}51;\ 0{,}59;\ 0{,}07;\ 0{,}95;\ 0{,}66;\ 0{,}15;\ 0{,}56;\ 0{,}64;\ 0{,}34$.

Очевидно, по нашей схеме значениям γ меньшим, чем 0,58, отвечают значения $\theta = 3$, а значениям $\gamma \geqslant 0{,}58$ — значения $\theta = 4$. Следовательно, мы получим значения: $\theta = 4;\ 3;\ 4;\ 3;\ 4;\ 4;\ 3;\ 3;\ 4;\ 3$.

Заметим, что порядок нумерации значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в распределении ξ может быть произвольным, однако он должен быть фиксирован до начала розыгрыша.

4.2. Разыгрывание непрерывной случайной величины. Допустим теперь, что нам нужно получить значения случайной величины ξ, распределенной в интервале (a, b) с плотностью $p(x)$.

Докажем, что значения ξ можно находить из уравнения

$$\int_a^{\xi} p(x)\,dx = \gamma, \tag{23}$$

то есть выбрав очередное значение γ, надо решить уравнение (23) и найти очередное значение ξ.

Для доказательства рассмотрим функцию (рис. 12)

$$y = \int_a^x p(x)\,dx.$$

Из общих свойств плотности (15) и (16) следует, что

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 1,$$

а производная

$$y'(x) = p(x) > 0.$$

*) Так как в этом примере p_i заданы с двумя десятичными знаками, то вполне достаточно брать значения γ с двумя десятичными знаками. При таком приближении возможен случай $\gamma = 0{,}58$, который надо объединить со случаем $\gamma > 0{,}58$ (ибо значение $\gamma = 0{,}00$ возможно, а значение $\gamma = 1{,}00$ невозможно). При использовании многозначных γ случай равенства $\gamma = p_i$ мало вероятен и его можно относить к любому из неравенств.

Значит, функция $y(x)$ монотонно возрастает от 0 до 1. И любая прямая $y=\gamma$, где $0<\gamma<1$, пересекает график $y=y(x)$ в одной-единственной точке, абсциссу которой мы и принимаем за ξ. Таким образом, уравнение (23) всегда имеет одно и только одно решение.

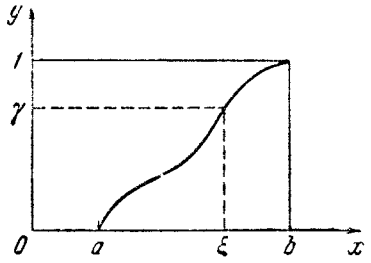

Рис. 12.

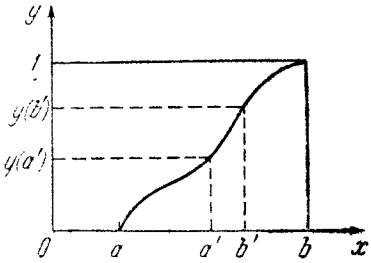

Рис. 13.

Выберем теперь произвольный интервал (a', b'), содержащийся внутри (a, b). Точкам этого интервала

$$a' < x < b'$$

отвечают ординаты кривой $y=y(x)$, удовлетворяющие неравенству

$$y(a') < y < y(b').$$

Поэтому если ξ принадлежит интервалу $a' < x < b'$, то γ принадлежит интервалу $y(a') < y < y(b')$, и наоборот (рис. 13). Значит,

$$P\{a' < \xi < b'\} = P\{y(a') < \gamma < y(b')\}.$$

Так как γ равномерно распределена в $(0, 1)$, то

$$P\{y(a') < \gamma < y(b')\} = y(b') - y(a') = \int_{a'}^{b'} p(x)\,dx.$$

Итак,

$$P\{a' < \xi < b'\} = \int_{a'}^{b'} p(x)\,dx,$$

а это как раз и означает, что случайная величина ξ, являющаяся корнем уравнения (23), имеет плотность вероятностей $p(x)$.

Пример. Случайная величина η называется *равномерно распределенной в интервале* (a, b), если ее плотность постоянна в этом интервале:

$$p(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{при} \quad a < x < b.$$

Чтобы разыгрывать значения η, составим уравнение (23):

$$\int_a^{\eta} \frac{dx}{b-a} = \gamma.$$

Интеграл легко вычисляется:

$$\frac{\eta - a}{b-a} = \gamma.$$

Отсюда получается явное выражение для η:

$$\eta = a + \gamma(b-a). \tag{24}$$

Другие примеры применения формулы (23) приведены в пп. 5.2 и 8.3.

4.3. Метод Неймана для разыгрывания непрерывной случайной величины. Может оказаться, что разрешить уравнение (23) относительно ξ весьма трудно. Например, в случае, когда интеграл от $p(x)$ не выражается через элементарные функции или когда плотность $p(x)$ задана графически.

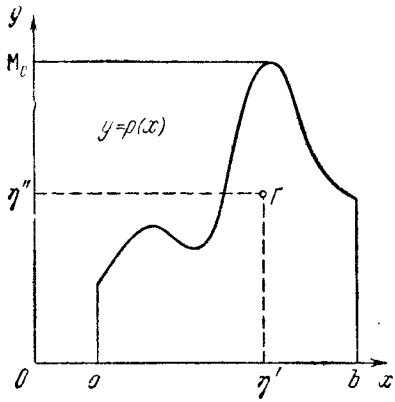

Рис. 14.

Предположим, что случайная величина ξ определена на конечном интервале (a, b) и плотность ее ограничена (рис. 14):

$$p(x) \leqslant M_0.$$

Разыгрывать значение ξ можно следующим образом:

1) выбираем два значения γ' и γ'' случайной величины γ и строим случайную точку $\Gamma(\eta'; \eta'')$ с координатами

$$\eta' = a + \gamma'(b-a), \quad \eta'' = \gamma'' M_0;$$

2) если точка Г лежит под кривой $y=p(x)$, то полагаем $\xi=\eta'$, если же точка Г лежит над кривой $y=p(x)$, то пару (γ', γ'') отбрасываем и выбираем новую пару значений (γ', γ'').

Обоснование этого метода приведено в п. 9.1.

4.4. О разыгрывании нормальных величин. Существует много весьма разнообразных приемов для разыгрывания различных случайных величин. Мы не будем здесь на них останавливаться. Они используются обычно лишь тогда, когда приемы пп. 4.2 и 4.3 оказываются малоэффективными.

В частности, такой случай имеет место для нормальной случайной величины ζ, так как уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\zeta} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \gamma$$

в явном виде неразрешимо, а интервал возможных значений ζ бесконечен.

В таблице Б в конце книги (на стр. 62) приведены значения (уже разыгранные) нормальной случайной величины ζ с математическим ожиданием $\mathbf{M}\zeta=0$ и с дисперсией $\mathbf{D}\zeta=1$. Нетрудно доказать*), что случайная величина

$$\zeta' = a + \sigma\zeta \tag{25}$$

будет также нормальной, причем из (10) и (11) следует, что

$$\mathbf{M}\zeta' = a, \quad \mathbf{D}\zeta' = \sigma^2.$$

Таким образом, формула (25) позволяет с помощью таблицы Б разыгрывать значения любых нормальных величин.

4.5. Снова о примере из п. 1.2. Теперь можно объяснить, как выбирались случайные точки на рис. 1 и 2. На рис. 1 построены точки с координатами

$$x = \gamma', \quad y = \gamma''.$$

Значения γ' и γ'' вычислялись по пятеркам цифр из таблицы А: $x_1=0{,}86515$; $y_1=0{,}90795$; $x_2=0{,}66155$; $y_2=0{,}66434$ и т. д.

*) Доказательство приведено в п. 9.2.

Можно доказать*), что так как абсциссы и ординаты наших точек независимы, то вероятность попадания такой точки в любую область внутри квадрата равна площади этой области. Иначе говоря, точки равномерно распределены в квадрате.

На рис. 2 построены точки с координатами

$$x = 0{,}5 + 0{,}2\zeta', \quad y = 0{,}5 + 0{,}2\zeta'',$$

причем значения ζ' и ζ'' выбирались из таблицы Б подряд:

$$x_1 = 0{,}5 + 0{,}2 \cdot 0{,}2005, \quad y_1 = 0{,}5 + 0{,}2 \cdot 1{,}1922;$$
$$x_2 = 0{,}5 + 0{,}2(-0{,}0077), \ldots$$

Одна из точек, оказавшаяся вне квадрата, отброшена.

Из формулы (25) следует, что абсциссы и ординаты этих точек представляют собой нормальные случайные величины со средними $a = 0{,}5$ и с дисперсиями $\sigma^2 = 0{,}04$.

*) Доказательство приведено в п. 9.3.

ГЛАВА 2

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО

§ 5. Расчет системы массового обслуживания

5.1. Описание задачи. Рассмотрим одну из самых простых систем массового обслуживания. Система эта состоит из n линий (или каналов, или пунктов обслуживания), каждый из которых может «обслуживать потребителей». В систему поступают заявки, причем моменты их поступления случайные. Каждая заявка поступает на линию номер 1. Если в момент поступления k-й заявки (назовем его T_k) эта линия свободна, то она приступает к обслуживанию заявки, что продолжается $t_з$ минут ($t_з$ — *время занятости линии*). Если в момент T_k линия номер 1 занята, то заявка мгновенно передается на линию номер 2. И так далее...

Наконец, если все n линий в момент T_k заняты, то система выдает отказ.

Требуется определить, сколько (в среднем) заявок обслужит система за время T и сколько отказов она даст?

Ясно, что задачи такого типа встречаются при исследовании организации работы любых предприятий, а не только предприятий бытового обслуживания. В некоторых очень частных случаях удается найти аналитические решения. Однако в сложных случаях (о них будет сказано ниже) метод Монте-Карло оказывается единственным методом расчета.

5.2. Простейший поток заявок. Первый вопрос, возникающий при рассмотрении такой системы: что представляет собой поток поступающих заявок? Этот вопрос решается опытом, путем достаточно длительного

наблюдения за заявками. Изучение потоков заявок в различных условиях позволило выделить некоторые достаточно часто встречающиеся случаи.

Простейшим потоком (или *потоком Пуассона*) называется такой поток заявок, когда промежуток времени τ между двумя последовательными заявками есть случайная величина, распределенная в интервале $(0, \infty)$ с плотностью

$$p(x) = ae^{-ax}. \qquad (26)$$

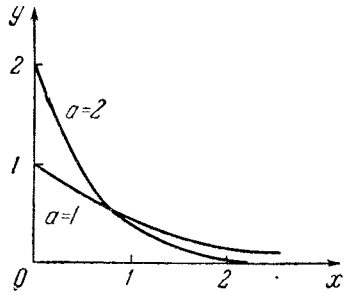

Рис. 15.

Закон (26) называют также *экспоненциальным распределением* (см. рис. 15, где построены плотности (26) при $a=1$ и $a=2$).

Легко вычислить математическое ожидание τ:

$$\mathbf{M}\tau = \int_0^\infty xp(x)\,dx = \int_0^\infty xae^{-ax}\,dx.$$

После интегрирования по частям ($u=x$, $dv=ae^{-ax}\,dx$) получим

$$\mathbf{M}\tau = [-xe^{-ax}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \left[-\frac{e^{-ax}}{a}\right]_0^\infty = \frac{1}{a}.$$

Параметр a называется *плотностью потока заявок*.

Формулу для розыгрыша τ легко получить из уравнения (23), которое в нашем случае запишется так:

$$\int_0^\tau ae^{-ax}\,dx = \gamma.$$

Вычислив интеграл, стоящий слева, получим соотношение

$$1 - e^{-a\tau} = \gamma,$$

откуда

$$\tau = -\frac{1}{a}\ln(1-\gamma).$$

Впрочем, величина $1-\gamma$ распределена точно так же, как γ, и поэтому можно вместо последней формулы использовать формулу

$$\tau = -\frac{1}{a}\ln\gamma. \qquad (27)$$

5.3. Схема расчета. Итак, рассмотрим работу системы из п. 5.1 в случае простейшего потока заявок.

Каждой линии поставим в соответствие ячейку внутреннего накопителя *ЭВМ*, в которую будем записывать момент, когда эта линия освобождается. Обозначим момент освобождения i-й линии через t_i. За начальный момент расчета выберем момент поступления первой заявки $T_1=0$. Можно считать, что в этот момент все t_i равны T_1: все линии свободны. Время окончания расчета $T_{\text{кон}}=T_1+T$.

Первая заявка поступает на линию номер 1. Значит, в течение t_3 линия эта будет занята. Поэтому мы должны заменить t_1 на новое значение $(t_1)_{\text{нов}}=T_1+t_3$, добавить единицу к счетчику выполненных заявок и перейти к рассмотрению второй заявки.

Предположим, что k заявок уже рассмотрены. Тогда надо разыграть момент поступления $(k+1)$-й заявки. Для этого выбираем очередное значение γ и по формуле (27) вычисляем очередное значение $\tau=\tau_k$. А затем вычисляем момент поступления

$$T_{k+1}=T_k+\tau_k.$$

Свободна ли в этот момент первая линия? Для установления этого надо проверить условие

$$t_1 \leqslant T_{k+1}. \qquad (28)$$

Если это условие выполнено, то, значит, к моменту T_{k+1} линия уже освободилась и может обслужить эту заявку. Мы должны заменить t_1 на $T_{k+1}+t_3$, добавить единицу к счетчику выполненных заявок и перейти к следующей заявке.

Если условие (28) не выполнено, то это значит, что первая линия в момент T_{k+1} занята. Тогда мы проверяем, свободна ли вторая линия:

$$t_2 \leqslant T_{k+1}? \qquad (29)$$

Если условие (29) выполнено, то мы заменяем t_2 на $T_{k+1}+t_3$, добавляем единицу к счетчику выполненных заявок и переходим к следующей заявке.

Если же условие (29) не выполнено, то переходим к проверке условия

$$t_3 \leqslant T_{k+1}.$$

Может оказаться, что при всех i от 1 до n

$$t_i > T_{k+1},$$

то есть все линии в момент T_{k+1} заняты. Тогда надо добавить единицу в счетчик отказов и потом перейти к рассмотрению следующей заявки.

Каждый раз, вычислив T_{k+1}, надо проверять еще условие окончания опыта

$$T_{k+1} > T_{\text{кон}}.$$

Когда это условие окажется выполненным, опыт заканчивается. В счетчике выполненных заявок и в счетчике отказов будут стоять числа $\mu_{\text{вып}}$ и $\mu_{\text{отк}}$.

Такой опыт повторяется N раз (с использованием различных γ). И результаты всех опытов осредняются:

$$\mathbf{M}\mu_{\text{вып}} \approx \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \mu_{\text{вып}\,(j)},$$

$$\mathbf{M}\mu_{\text{отк}} \approx \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \mu_{\text{отк}\,(j)},$$

где $\mu_{\text{вып}(j)}$ и $\mu_{\text{отк}(j)}$ — значения $\mu_{\text{вып}}$ и $\mu_{\text{отк}}$, полученные в j-м опыте.

На рис. 16 приведена блок-схема программы, осуществляющей такой расчет (в случае необходимости можно получить значения $\mu_{\text{вып}(j)}$ и $\mu_{\text{отк}(j)}$ для отдельных испытаний в блоке «конец опыта»).

5.4. Более сложные задачи. Очень легко показать, что этот же метод позволяет рассчитывать несравненно более сложные системы. Например, величина t_3 может быть не постоянной, а случайной и различной для различных линий (что соответствует различному оборудованию или различной квалификации обслуживающего персонала). Схема расчета останется в основном

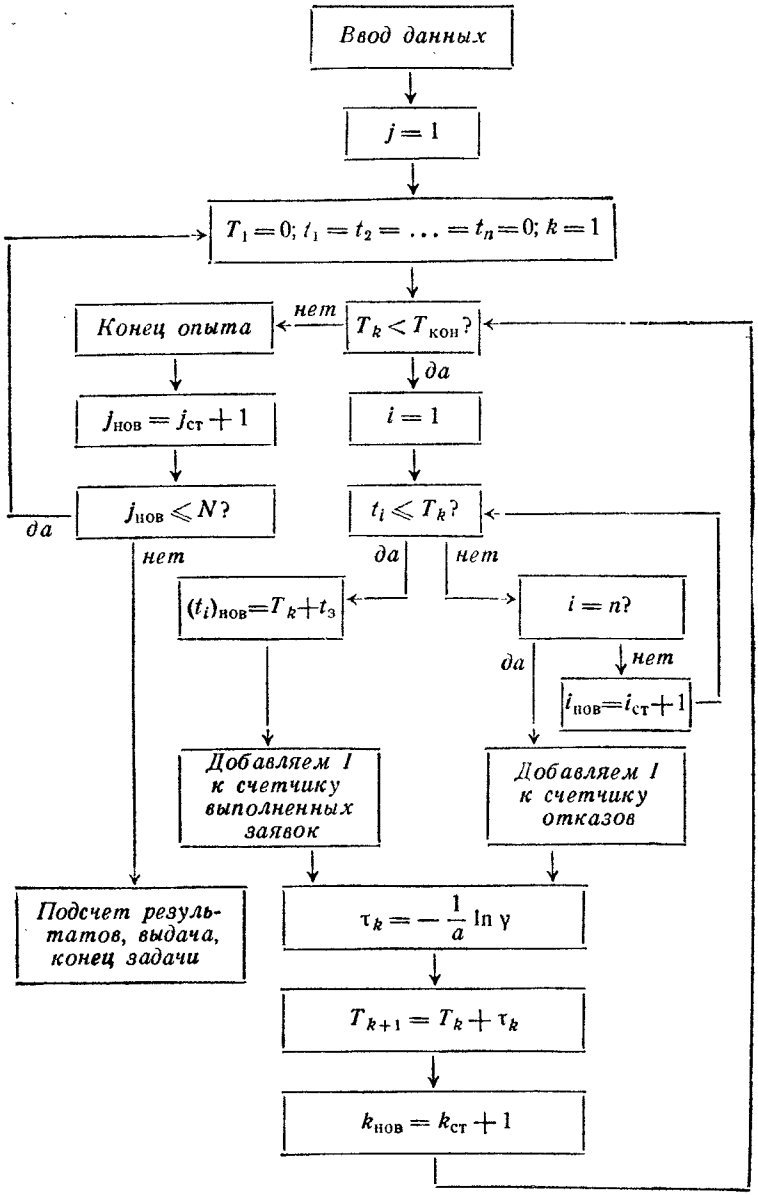
Ввод данных
$j = 1$
$T_1 = 0;\ t_1 = t_2 = \ldots = t_n = 0;\ k = 1$
$T_k < T_{кон}$?
нет
Конец опыта
да
$j_{нов} = j_{ст} + 1$
$j_{нов} \leqslant N$?
да
нет
$i = 1$
$t_i \leqslant T_k$?
да
нет
$(t_i)_{нов} = T_k + t_з$
$i = n$?
да
нет
$i_{нов} = i_{ст} + 1$
Добавляем 1 к счетчику выполненных заявок
Добавляем 1 к счетчику отказов
Подсчет результатов, выдача, конец задачи
$\tau_k = -\frac{1}{a} \ln \gamma$
$T_{k+1} = T_k + \tau_k$
$k_{нов} = k_{ст} + 1$

Рис. 16.

такой же, но значения $t_з$ придется каждый раз разыгрывать, и формула разыгрывания для каждой линии будет своя.

Можно рассматривать так называемые *системы с ожиданием*, в которых отказ выдается не сразу: заявка хранится в течение некоторого времени $t_п$ *(время пребывания заявки в системе)*, и если за это время какая-нибудь линия освободится, то она обслужит эту заявку.

Можно рассматривать системы, в которых очередную заявку принимает та линия, которая раньше всех освободилась. Можно учесть случайный выход из строя отдельных линий и случайное время ремонта каждой из них. Можно учесть изменения плотности потока заявок во времени. И многое, многое другое.

Конечно, расчеты таких систем не даются даром. Чтобы получить результаты, имеющие практическую ценность, надо выбрать хорошую модель. Для этого приходится достаточно тщательно изучать действительные потоки заявок, проводить хронометраж работы отдельных узлов и т. п.

Вообще надо знать вероятностные законы функционирования отдельных частей системы. Тогда метод Монте-Карло позволяет вычислить вероятностные законы работы всей системы, как бы сложна она ни была.

Такие методы расчета чрезвычайно полезны при планировании предприятий: вместо дорогостоящего (а иногда просто невозможного) эксперимента в натуре мы можем экспериментировать на *ЭВМ*, моделируя разные варианты организации работы или использования оборудования.

§ 6. Расчет качества и надежности изделий

6.1. Простейшая схема расчета качества. Рассмотрим изделие S, состоящее из некоторого (может быть, большого) числа элементов. Например, если S представляет собой электрический прибор, то элементами его могут быть сопротивления $(R_{(k)})$, емкости $(C_{(k)})$, лампы и т. п. Предположим, что качество изделия определяется значением одного выходного параметра U, которое можно вычислить, зная параметры всех элементов

$$U = f(R_{(1)}, R_{(2)}, \ldots; C_{(1)}, C_{(2)}, \ldots; \ldots). \qquad (30)$$

Если, например, U — это напряжение на рабочем участке электрический цепи, то по законам Ома можно составить уравнения для цепи и, решая их, найти U.

В действительности, однако, параметры элементов не равны в точности указанным значениям. Например, сопротивление, изображенное на рис. 17, может оказаться любым в интервале от 20,9 до 23,1 $K\Omega$.

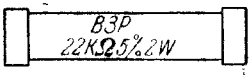

Рис. 17.

Возникает вопрос: как повлияют отклонения параметров всех элементов от номинальных на значение U?

Можно попытаться оценить пределы изменения U, выбирая для всех элементов «худшие» значения параметров. Однако далеко не всегда известно, какой набор параметров будет «худшим». К тому же, если число элементов велико, то такая оценка окажется сильно завышенной: на самом деле маловероятно, чтобы все параметры одновременно оказались наихудшими.

Поэтому разумнее считать параметры всех элементов и саму величину U случайными величинами и попытаться оценить математическое ожидание $\mathbf{M}U$ и дисперсию $\mathbf{D}U$. Величина $\mathbf{M}U$ — это среднее значение U для всей партии изделий, а величина $\mathbf{D}U$ показывает, какие отклонения U от $\mathbf{M}U$ будут встречаться на практике.

Напомним (об этом было сказано в п. 2.2), что

$$\mathbf{M}U \neq f(\mathbf{M}R_{(1)}, \mathbf{M}R_{(2)}, \ldots; \mathbf{M}C_{(1)}, \mathbf{M}C_{(2)}, \ldots; \ldots).$$

Вычислить аналитически распределение U при маломальски сложной функции f невозможно. Иногда это можно сделать экспериментально, просмотрев большую партию готовых изделий. Но это возможно далеко не всегда, а на стадии проектирования — никогда.

Попробуем применить метод Монте-Карло. Для этого нужно: а) знать вероятностные характеристики всех элементов, б) знать функцию f (точнее, уметь вычислять значение U по любым фиксированным значениям $R_{(1)}$, $R_{(2)}$, ...; $C_{(1)}$, $C_{(2)}$, ...; ...).

Вероятностное распределение параметров для каждого отдельного элемента можно получить экспериментально, путем просмотра большой партии таких элементов. Весьма часто это распределение оказывается нормальным. Поэтому многие исследователи поступают

следующим образом: например, считают сопротивление элемента, изображенного на рис. 17, нормальной случайной величиной ρ с математическим ожиданием $\mathbf{M}\rho = 22$ и с $3\sigma = 1{,}1$ (напомним, что получить в одном опыте значение ρ, отклоняющееся от $\mathbf{M}\rho$ больше чем на 3σ, практически невозможно, см. (20)).

Схема расчета оказывается очень простой: для каждого элемента разыгрывается значение параметра; затем по формуле (30) вычисляется значение U. Повторив этот опыт N раз и получив значения $U_1, U_2, \ldots, U_N$, можем приближенно считать, что

$$\mathbf{M}U \approx \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} U_j,$$

$$\mathbf{D}U \approx \frac{1}{N-1}\left[\sum_{j=1}^{N}(U_j)^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{N} U_j\right)^2\right].$$

При больших N в последней формуле можно заменить множитель $1/(N-1)$ на $1/N$, и тогда эта формула окажется простым следствием формул (8) и (9). В математической статистике доказывается, что при небольших N лучше сохранить множитель $1/(N-1)$.

6.2. Примеры расчета надежности. Пусть мы хотим оценить среднее время безотказной работы изделия, предполагая, что известны характеристики безотказной работы каждого из элементов.

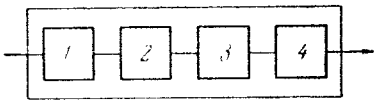

Рис. 18.

Если считать, что время безотказной работы каждого элемента $t_{(k)}$ — фиксированная величина, то вычислить время безотказной работы t изделия не составит труда. Например, для изделия, схематически изображенного на рис. 18, в котором выход из строя одного элемента влечет за собой выход из строя всего изделия,

$$t = \min(t_{(1)};\ t_{(2)};\ t_{(3)};\ t_{(4)}). \qquad (31)$$

А для изделия, схематически изображенного на рис. 19, в котором один из элементов дублирован,

$$t = \min[t_{(1)};\ t_{(2)};\ \max(t_{(3)};\ t_{(4)});\ t_{(5)}], \qquad (32)$$

так как если, например, элемент № 3 выйдет из строя, то изделие будет продолжать работать на одном элементе № 4.

В действительности время безотказной работы любого элемента представляет собой случайную величину $\Theta_{(k)}$. Когда мы говорим, что срок службы электрической лампочки равен 1000 часов, то это лишь среднее значение $\mathbf{M}\Theta$ величины Θ: всем известно, что одна лампочка перегорает быстрее, а другая (в точности такая же) горит дольше.

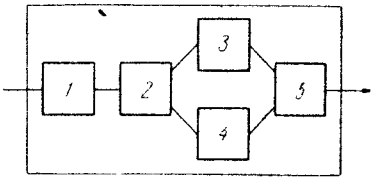

Рис. 19.

Если известны плотности распределений $\Theta_{(k)}$ для каждого из элементов изделия, то $\mathbf{M}\Theta$ можно сосчитать методом Монте-Карло в точности так же, как это делалось в п. 6.1. В самом деле, для каждого элемента можно разыграть значение величины $\Theta_{(k)}$, пусть это будет $t_{(k)}$. Затем по соответствующей формуле (31) или (32) можно вычислить значение t случайной величины Θ. Повторив этот опыт достаточно много (N) раз, можем считать, что

$$\mathbf{M}\Theta \approx \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} t_j,$$

где t_j — значение t, полученное в j-м опыте.

Необходимо заметить, что вопрос о распределении времени жизни Θ_k для отдельных элементов не так уж прост: для наиболее долговечных элементов организация эксперимента затруднительна, так как нужно дождаться, пока выйдет из строя достаточно много элементов.

6.3. Дальнейшие возможности метода. Приведенные примеры показывают, что методика расчета качества проектируемых изделий весьма проста по идее. Нужно знать вероятностные характеристики всех элементов изделия и уметь вычислить интересующую нас величину, как функцию от параметров этих элементов. Тогда случайность параметров можно учесть путем моделирования.

При моделировании можно получить гораздо больше полезной информации, а не только математическое ожидание и дисперсию интересующей нас величины. Пусть, например, мы получили большое число N значений $U_1, U_2, \ldots, U_N$ случайной величины U. По этим значениям можно построить приближенную плотность распределения U. Вопрос этот относится, по существу, к статистике, так как речь идет об обработке результатов экспериментов (только проведены они на *ЭВМ*). Поэтому ограничимся лишь конкретным примером.

Допустим, что мы получили всего $N=120$ значений $U_1, U_2, \ldots, U_{120}$ случайной величины U, и все они заключены в пределах

$$1 < U_j < 6{,}5.$$

Разобьем интервал $1 < x < 6{,}5$ на 11 (любое число, не слишком большое и не слишком малое) равных интервалов длиной $\Delta x = 0{,}5$ и сосчитаем, сколько значений U_j попали в каждый интервал. Числа попаданий приведены на рис. 20.

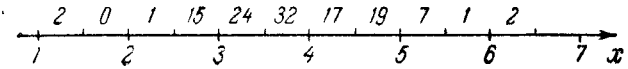

Рис. 20.

Частота попадания в какой-либо интервал получается делением числа попаданий на $N=120$. В нашем примере частоты равны: 0,017; 0; 0,008; 0,12; 0,20; 0,27; 0,14; 0,16; 0,06; 0,008; 0,017.

Над каждым из интервалов разбиения построим прямоугольник, площадь которого равна частоте попадания U_j в этот интервал (рис. 21). Иначе говоря, высота каждого прямоугольника равна частоте, деленной на Δx. Полученную ступенчатую линию называют *гистограммой*.

Гистограмма служит приближением к неизвестной плотности случайной величины U. Поэтому, например, площадь гистограммы, заключенная между $x=2{,}5$ и $x=5{,}5$, дает нам приближенное значение вероятности

$$P\{2{,}5 < U < 5{,}5\} \approx 0{,}94.$$

Следовательно, на основании проведенного расчета (опыта) можно считать, что с вероятностью, приблизи-

тельно равной 0,94, величина U заключена в интервале $2{,}5 < U < 5{,}5$.

На рис. 21 для сравнения построена плотность нормальной случайной величины ζ' с параметрами $a=3{,}85$, $\sigma=0{,}88$. Если по этой плотности вычислить вероятность

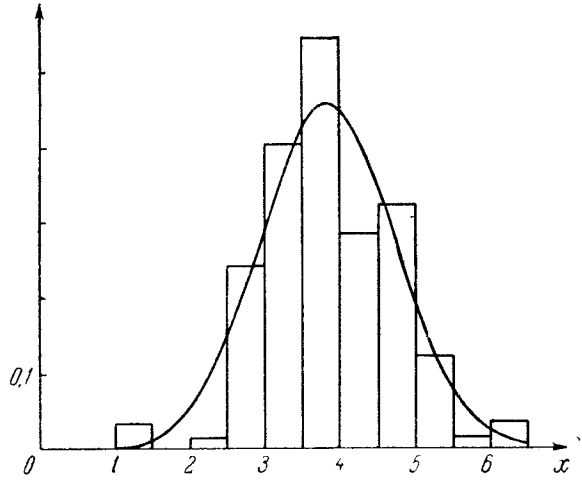

Рис. 21.

того, что ζ' заключена в интервале $2{,}5 < \zeta' < 5{,}5$, то получим довольно близкое значение 0,91 *).

*) Ход вычислений. Согласно (14) запишем

$$P\{2{,}5 < \zeta' < 5{,}5\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{2{,}5}^{5{,}5} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx.$$

В интеграле сделаем замену переменной $x-a=\sigma t$. Тогда получим

$$P\{2{,}5 < \zeta' < 5{,}5\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt,$$

где $t_1 = \frac{2{,}5-a}{\sigma} = -1{,}54$, $t_2 = \frac{5{,}5-a}{\sigma} = 1{,}88$. Значение последнего интеграла вычисляется с помощью таблиц так называемого интеграла вероятностей $\Phi(x)$, в которых приведены значения функции

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Получим

$$P\{2{,}5 < \zeta' < 5{,}5\} = 0{,}5\,[\Phi(1{,}88) + \Phi(1{,}54)] = 0{,}91.$$

6.4. Замечание. К сожалению, расчеты такого типа пока проводят редко. В чем главная причина этого — трудно сказать. Скорее всего в том, что конструкторы и проектировщики не знают о такой возможности.

К тому же, прежде чем рассчитывать таким методом какие-либо изделия, надо изучить вероятностные характеристики всех элементов, входящих в эти изделия. Это немалая работа. Правда, зная эти характеристики, можно оценивать качество любых изделий, состоящих из этих элементов. Можно оценивать изменение качества при замене одних элементов другими.

Нужно надеяться, что в ближайшие годы такие расчеты станут привычным делом. А вероятностные характеристики элементов будут всегда выдаваться предприятиями, их изготовляющими.

§ 7. Расчет прохождения нейтронов сквозь пластинку

Вероятностные законы взаимодействия отдельной элементарной частицы (нейтрона, фотона, мезона и др.) с веществом известны. Обычно требуется найти макроскопические характеристики процессов, в которых участвует огромное количество таких частиц: плотности, потоки и т. п. Эта ситуация похожа на ту, с которой мы сталкивались в §§ 5 и 6, и весьма удобна для использования метода Монте-Карло.

Пожалуй, чаще всего метод Монте-Карло используется в нейтронной физике. Мы рассмотрим простейший вариант задачи о прохождении нейтронов сквозь пластинку.

7.1. Постановка задачи. Пусть на однородную бесконечную пластинку $0 \leqslant x \leqslant h$ падает поток нейтронов с энергией E_0. Угол падения 90°. При столкновении с атомами вещества, из которого состоит пластинка, нейтроны могут упруго рассеиваться или поглощаться. Предположим для простоты, что энергия нейтрона при рассеянии не меняется и любое направление «отскока» нейтрона от атома одинаково вероятно (последнее иногда справедливо в веществах с тяжелыми атомами). На рис. 22 изображены различные судьбы нейтронов: нейтрон (*а*) проходит сквозь пластинку, нейтрон (*б*) поглощается, нейтрон (*в*) отражается пластинкой.

Требуется вычислить вероятность прохождения нейтрона сквозь пластинку p^+, вероятность отражения нейтрона пластинкой p^- и вероятность поглощения нейтрона в пластинке p^0.

Взаимодействие нейтронов с веществом характеризуется в рассматриваемом случае двумя постоянными Σ_c и Σ_s, которые называются *сечением поглощения* и *сечением рассеяния*. Индексы c и s — это первые буквы английских слов capture (захват) и scattering (рассеяние).

Сумма этих сечений называется *полным сечением*

$$\Sigma = \Sigma_c + \Sigma_s.$$

Физический смысл сечений следующий: при столкновении нейтрона с атомом вещества вероятность поглощения равна Σ_c/Σ, а вероятность рассеяния равна Σ_s/Σ.

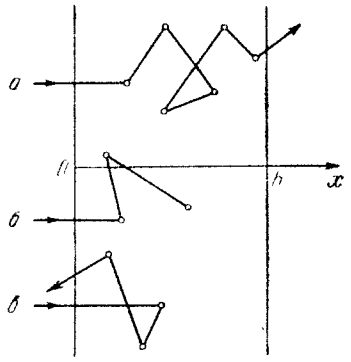

Рис. 22.

Длина свободного пробега нейтрона λ (то есть длина пути от столкновения до столкновения) — это случайная величина. Она может принимать любые положительные значения с плотностью вероятностей

$$p(x) = \Sigma e^{-\Sigma x}.$$

Нетрудно заметить, что эта плотность величины λ совпадает с плотностью (26) случайной величины τ для простейшего потока заявок. По аналогии с п. 5.2 мы можем сразу написать выражение для средней длины свободного пробега

$$M\lambda = 1/\Sigma$$

и формулу для разыгрывания λ:

$$\lambda = -\frac{1}{\Sigma} \ln \gamma.$$

Остается еще выяснить, как выбирать случайное направление нейтрона после рассеяния. Так как задача симметрична относительно оси x, то направление вполне

определяется одним углом φ между направлением скорости нейтрона и осью Ox. Можно доказать *), что требование равной вероятности любого направления в этом случае равносильно требованию, чтобы косинус этого угла $\mu=\cos\varphi$ был равномерно распределен в интервале $(-1, 1)$. Из формулы (24) при $a=-1$, $b=1$ следует формула для разыгрывания μ:

$$\mu = 2\gamma - 1.$$

7.2. Схема расчета путем моделирования истинных траекторий. Предположим, что нейтрон испытал k-е рассеяние внутри пластинки в точке с абсциссой x_k и после этого начал двигаться в направлении μ_k.

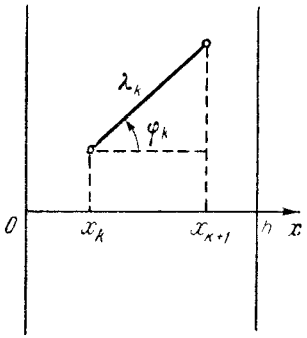

Рис. 23.

Разыграем длину свободного пробега

$$\lambda_k = -(1/\Sigma)\ln\gamma$$

и вычислим абсциссу следующего столкновения (рис. 23)

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k\mu_k.$$

Проверим условие прохождения сквозь пластинку:

$$x_{k+1} > h.$$

Если это условие выполнено, то счет траектории нейтрона заканчивается и добавляется единица к счетчику прошедших частиц. В противном случае проверяем условие отражения:

$$x_{k+1} < 0.$$

Если это условие выполнено, то счет траектории заканчивается и добавляется единица к счетчику отраженных частиц. Если же и это условие не выполнено, то есть $0 \leqslant x_{k+1} \leqslant h$, то, значит, нейтрон испытал $(k+1)$-е столкновение внутри пластинки, и надо разыграть «судьбу» нейтрона при столкновении.

*) Доказательство приведено в п. 9.4.

Согласно п. 4.1 выбираем очередное значение γ и проверяем условие поглощения:

$$\gamma < \Sigma_c/\Sigma.$$

Если последнее неравенство выполнено, то счет траектории заканчивается и добавляется единица к счетчику поглощенных частиц. В противном случае мы считаем, что нейтрон испытал рассеяние в точке с абсциссой x_{k+1}. Тогда разыгрываем новое направление скорости нейтрона

$$\mu_{k+1} = 2\gamma - 1$$

и затем повторяем весь цикл снова (но, конечно, уже с другими значениями γ).

Все γ написаны без индексов, так как имеется в виду, что каждое значение γ используется всего один раз. Для расчета одного звена траектории нужны три значения γ.

Начальные значения для каждой траектории:

$$x_0 = 0, \quad \mu_0 = 1.$$

После того как будут сосчитаны N траекторий, окажется, что N^+ нейтронов прошли сквозь пластинку, N^- нейтронов отразились от нее, а N^0 нейтронов были поглощены. Очевидно, искомые вероятности приближенно равны отношениям

$$p^+ \approx \frac{N^+}{N}, \quad p^- \approx \frac{N^-}{N}, \quad p^0 \approx \frac{N^0}{N}.$$

На рис. 24 приведена блок-схема программы для расчета этой задачи. Индекс j — это номер траектории, индекс k — номер столкновения (вдоль траектории).

Такая методика расчета хотя и очень естественна, но несовершенна. В частности, таким методом трудно вычислить вероятность p^+, когда она очень мала. А с таким случаем как раз приходится сталкиваться при расчете защиты от излучений.

Существуют более «хитрые» разновидности метода Монте-Карло, позволяющие рассчитывать и такие случаи. Остановимся коротко на одном из простейших вариантов расчета с помощью так называемых «весов».

7.3. Схема расчета с использованием весов, заменяющих поглощение. Рассмотрим ту же задачу о прохождении нейтронов. Предположим, что

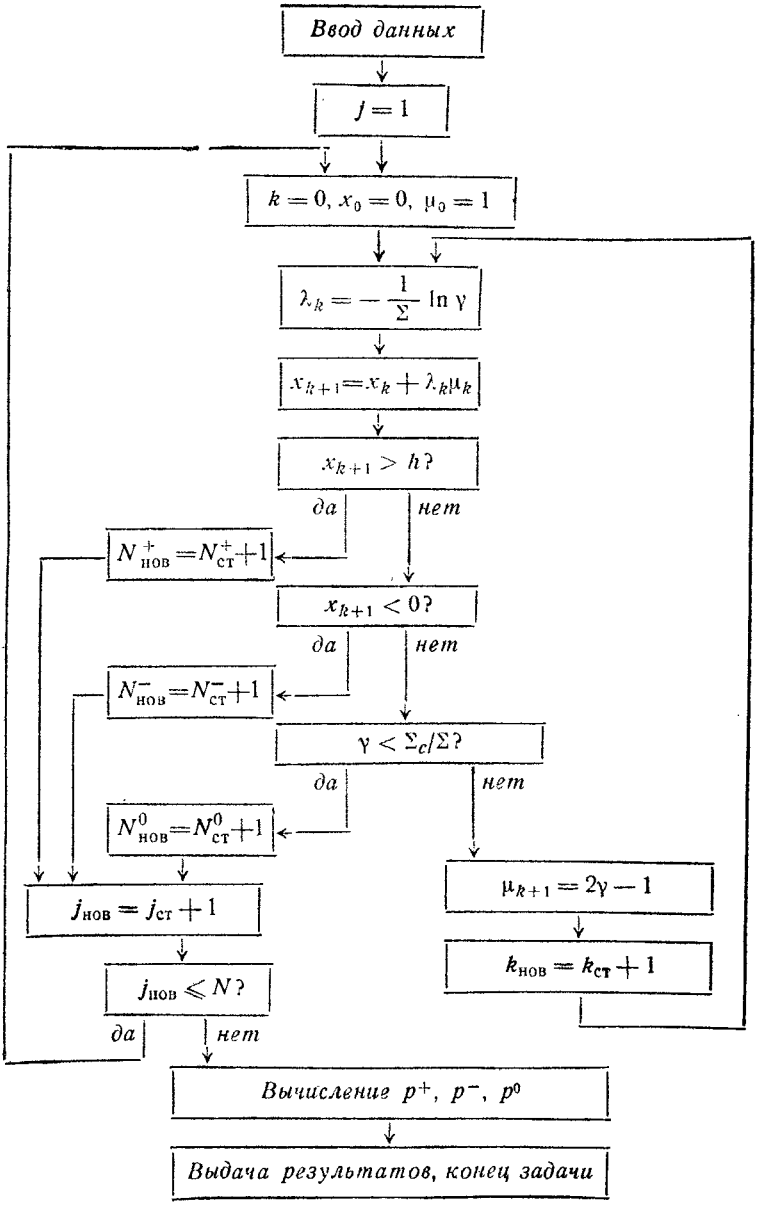
Ввод данных
$j=1$
$k=0,\ x_0=0,\ \mu_0=1$
$\lambda_k=-\frac{1}{\Sigma}\ln\gamma$
$x_{k+1}=x_k+\lambda_k\mu_k$
$x_{k+1}>h$?
да
нет
$N^+_{\text{нов}}=N^+_{\text{ст}}+1$
$x_{k+1}<0$?
да
нет
$N^-_{\text{нов}}=N^-_{\text{ст}}+1$
$\gamma<\Sigma_c/\Sigma$?
да
нет
$N^0_{\text{нов}}=N^0_{\text{ст}}+1$
$\mu_{k+1}=2\gamma-1$
$j_{\text{нов}}=j_{\text{ст}}+1$
$k_{\text{нов}}=k_{\text{ст}}+1$
$j_{\text{нов}}\leqslant N$?
да
нет
Вычисление p^+, p^-, p^0
Выдача результатов, конец задачи

Рис. 24.

вдоль одной и той же траектории движется «пакет», состоящий из большого числа w_0 одинаковых нейтронов. При столкновении в точке с абсциссой x_1 количество поглощенных нейтронов из «пакета» в среднем равно $w_0(\Sigma_c/\Sigma)$, а количество нейтронов, испытавших рассеяние, в среднем равно $w_0(\Sigma_s/\Sigma)$.

Добавим величину $w_0(\Sigma_c/\Sigma)$ к счетчику поглощенных частиц, а за движением рассеянного «пакета» будем следить дальше, предположив, что весь оставшийся «пакет» рассеялся в одном направлении.

Все формулы счета, приведенные в п. 7.2, остаются прежними. Только при каждом столкновении количество нейтронов в «пакете» будет уменьшаться

$$w_{k+1} = w_k(\Sigma_s/\Sigma),$$

так как часть «пакета», содержащая $w_k(\Sigma_c/\Sigma)$ нейтронов, будет поглощаться. И траектория теперь не может закончиться поглощением.

Величину w_k обычно называют *весом* нейтрона и вместо того, чтобы говорить о «пакете», состоящем из w_k нейтронов, говорят об одном нейтроне с весом w_k. Начальный вес w_0 обычно полагают равным 1. Это не противоречит нашим рассуждениям о «большом пакете», ибо нетрудно заметить, что все w_k, получающиеся при расчете одной траектории, содержат w_0 общим множителем.

Блок-схема программы для реализации такого расчета приведена на рис. 25. Очевидно, она ничуть не сложнее, чем блок-схема, изображенная на рис. 24. Однако можно доказать *), что расчет p^+ методом настоящего пункта всегда выгоднее, чем расчет по методу п. 7.2.

7.4. Замечание. Существует довольно много разнообразных способов расчета, использующих различные веса. Мы не можем здесь на них останавливаться.

Отметим только, что метод Монте-Карло позволяет решать гораздо более сложные задачи об элементарных частицах: исследуемая среда может состоять из различных веществ и иметь любую геометрическую структуру; энергия частицы при каждом столкновении может меняться. Можно учитывать много других ядерных

*) Доказательство приведено в п. 9.5.

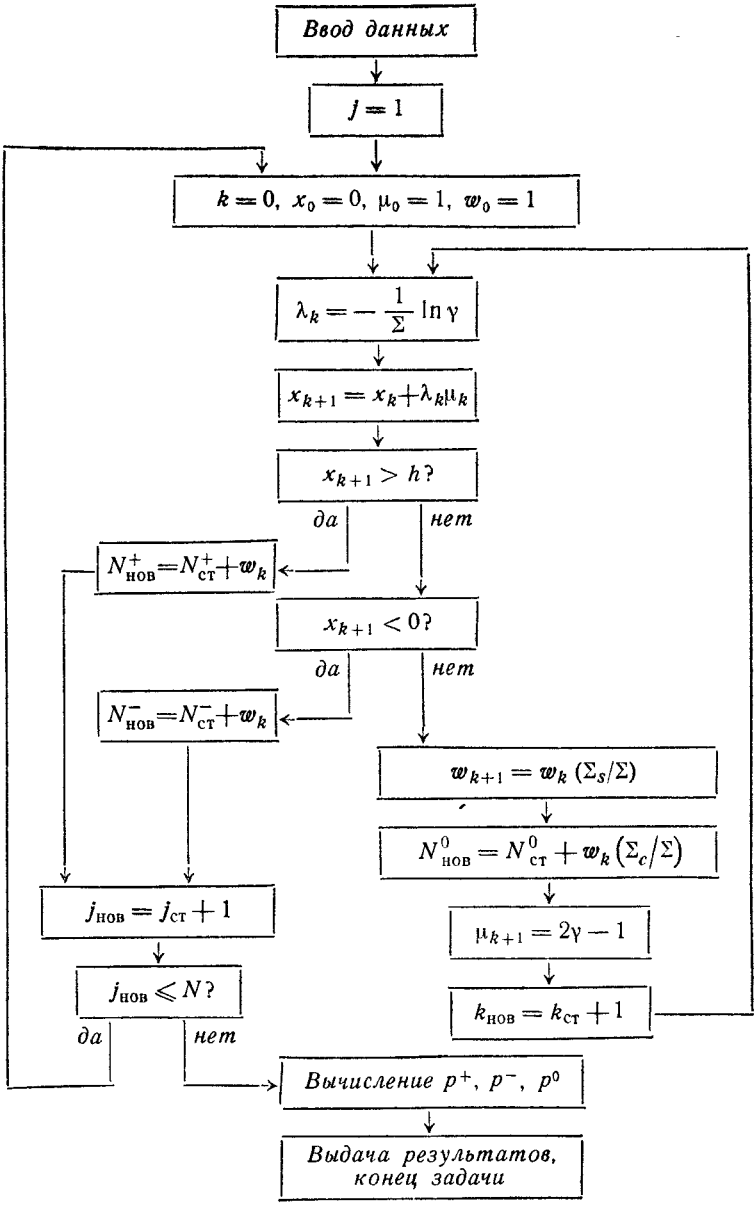
Ввод данных
$j = 1$
$k = 0,\ x_0 = 0,\ \mu_0 = 1,\ w_0 = 1$
$\lambda_k = -\frac{1}{\Sigma} \ln \gamma$
$x_{k+1} = x_k + \lambda_k \mu_k$
$x_{k+1} > h$?
да
нет
$N^+_{\text{нов}} = N^+_{\text{ст}} + w_k$
$x_{k+1} < 0$?
да
нет
$N^-_{\text{нов}} = N^-_{\text{ст}} + w_k$
$w_{k+1} = w_k\,(\Sigma_s/\Sigma)$
$N^0_{\text{нов}} = N^0_{\text{ст}} + w_k\,(\Sigma_c/\Sigma)$
$\mu_{k+1} = 2\gamma - 1$
$k_{\text{нов}} = k_{\text{ст}} + 1$
$j_{\text{нов}} = j_{\text{ст}} + 1$
$j_{\text{нов}} \leqslant N$?
да
нет
Вычисление $p^+,\ p^-,\ p^0$
Выдача результатов, конец задачи

Рис. 25.

процессов (например, возможность деления атома при столкновении с нейтроном и образование при этом новых нейтронов). Можно рассчитать условие возникновения и поддерживания цепной реакции и т. д. и т. п.

§ 8. Вычисление определенного интеграла

Задачи, рассмотренные в §§ 5, 6, 7, были вероятностными по своей природе, и использование метода Монте-Карло для их решения казалось довольно естественным. Здесь рассматривается просто математическая задача: приближенное вычисление определенного интеграла.

Так как вычисление определенных интегралов равносильно вычислению площадей, то можно было бы использовать метод примера 1.2. Вместо этого мы изложим другой, более эффективный метод, позволяющий строить разные вероятностные модели для решения этой задачи методом Монте-Карло, и укажем, как среди них выбирать модели «получше».

8.1. Метод вычисления. Рассмотрим функцию $g(x)$, заданную на интервале $a < x < b$. Требуется приближенно вычислить интеграл

$$I = \int_a^b g(x)\,dx. \tag{33}$$

Выберем произвольную плотность распределения $p_\xi(x)$, определенную на интервале (a, b) (то есть произвольную функцию $p_\xi(x)$, удовлетворяющую условиям (15) и (16)).

Наряду со случайной величиной ξ, определенной в интервале (a, b) с плотностью $p_\xi(x)$, нам понадобится случайная величина

$$\eta = g(\xi)/p_\xi(\xi).$$

Согласно (18)

$$\mathsf{M}\eta = \int_a^b \left[g(x)/p_\xi(x)\right] p_\xi(x)\,dx = I.$$

Рассмотрим теперь N одинаковых случайных величин $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N$ и применим к их сумме центральную

предельную теорему п. 2.4. Формула (21) в этом случае запишется так:

$$P\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\eta_j - I\right| < 3\sqrt{\frac{\mathsf{D}\eta}{N}}\right\} \approx 0{,}997. \qquad (34)$$

Последнее соотношение означает, что если мы выберем N значений $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$, то при достаточно большом N

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{g(\xi_j)}{p_\xi(\xi_j)} \approx I. \qquad (35)$$

Оно показывает также, что с очень большой вероятностью ошибка приближения (35) не превосходит $3\sqrt{\mathsf{D}\eta/N}$.

8.2. Как выбирать схему расчета. Мы видели, что для расчета интеграла (33) можно использовать любую случайную величину ξ, определенную в интервале (a, b). В любом случае

$$\mathsf{M}\eta = \mathsf{M}\left[g(\xi)/p_\xi(\xi)\right] = I.$$

Однако дисперсия $\mathsf{D}\eta$, а с ней и оценка погрешности формулы (35) зависят от того, какую величину ξ мы используем. В самом деле,

$$\mathsf{D}\eta = \mathsf{M}(\eta^2) - I^2 = \int_a^b \left[g^2(x)/p_\xi(x)\right] dx - I^2.$$

Можно доказать *), что это выражение будет минимальным тогда, когда $p_\xi(x)$ пропорциональна $|g(x)|$.

Конечно, выбирать очень сложные $p_\xi(x)$ нельзя, так как процедура разыгрывания значений ξ станет очень трудоемкой. Но руководствоваться этой рекомендацией при выборе $p_\xi(x)$ можно (см. пример п. 8.3).

На практике интегралы вида (33) методом Монте-Карло не вычисляют: для этого есть более точные методы — квадратурные формулы. Однако при переходе к многократным интегралам положение меняется: квадратурные формулы становятся очень сложными, а метод Монте-Карло остается почти без изменений.

*) Доказательство приведено в п. 9.6.

8.3. Численный пример. Вычислим приближенно интеграл

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx.$$

Точное значение этого интеграла известно:

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1.$$

Мы используем для вычисления две различные случайные величины ξ: с постоянной плотностью $p_\xi(x) \equiv 2/\pi$ (то есть ξ равномерно распределена в интервале $(0, \pi/2)$) и с линейной плотностью

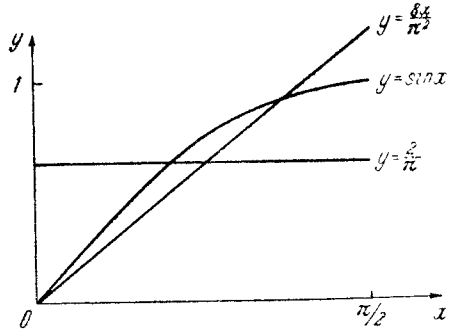

Рис. 26.

$p_\xi(x) = 8x/\pi^2$. Обе эти плотности вместе с подынтегральной функцией $\sin x$ построены на рис. 26. Из этого рисунка видно, что линейная плотность более соответствует рекомендации п. 8.2 о том, что желательна пропорциональность $p_\xi(x)$ и $\sin x$. Поэтому нужно ожидать, что второй способ вычисления даст лучший результат.

(а) Пусть $p_\xi(x) \equiv 2/\pi$ на интервале $(0, \pi/2)$. Формула для разыгрывания ξ может быть получена из формулы (24) при $a=0$ и $b=\pi/2$:

$$\xi = \frac{\pi}{2}\gamma.$$

А формула (35) примет вид

$$I \approx \frac{\pi}{2N} \sum_{j=1}^{N} \sin \xi_j.$$

Пусть $N=10$. В качестве значений γ используем тройки чисел из таблицы А (умноженные на 0,001). Промежуточные результаты сведены в табл. 1.

Таблица 1

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
γ_j	0,865	0,159	0,079	0,566	0,155	0,664	0,345	0,655	0,812	0,332
ξ_j	1,359	0,250	0,124	0,889	0,243	1,043	0,542	1,029	1,275	0,521
$\sin \xi_j$	0,978	0,247	0,124	0,776	0,241	0,864	0,516	0,857	0,957	0,498

Результат вычисления:

$$I \approx 0{,}952.$$

(б) Пусть теперь $p_\xi(x) = 8x/\pi^2$. Для разыгрывания ξ используем уравнение (23)

$$\int_0^\xi (8x/\pi^2)\, dx = \gamma,$$

откуда после несложных вычислений получим

$$\xi = \frac{\pi}{2}\sqrt{\gamma}.$$

Формула (35) примет такой вид:

$$I \approx \frac{\pi^2}{8N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\sin \xi_j}{\xi_j}.$$

Пусть $N = 10$. Числа γ выберем те же, что в случае (а). Промежуточные результаты сведены в табл. 2.

Таблица 2

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
γ_j	0,865	0,159	0,079	0,566	0,155	0,664	0,345	0,655	0,812	0,332
ξ_j	1,461	0,626	0,442	1,182	0,618	1,280	0,923	1,271	1,415	0,905
$\frac{\sin \xi_j}{\xi_j}$	0,680	0,936	0,968	0,783	0,937	0,748	0,863	0,751	0,698	0,868

Результат вычисления:

$$I \approx 1{,}016.$$

Как мы и предполагали, второй способ вычисления дал более точный результат.

8.4. Об оценке ошибки. В п. 8.2 уже отмечалось, что абсолютная ошибка при вычислении интеграла I по формуле (35) практически не может превысить величины $3\sqrt{\mathrm{D}\eta/N}$. Однако в действительности ошибка, как правило, оказывается заметно меньше этой величины. Поэтому для характеристики ошибки на практике часто используют другую величину — так называемую вероятную ошибку

$$\delta_{\text{вер}} = 0{,}675\sqrt{\mathrm{D}\eta/N}.$$

Фактическая абсолютная ошибка зависит от использованных в расчете случайных чисел и может оказаться как в 2—3 раза больше, так и в несколько раз меньше, чем $\delta_{\text{вер}}$. Так что $\delta_{\text{вер}}$ дает нам не границу ошибки, а порядок ее *).

Таблица 3

Метод	$\mathrm{D}\eta$	$\delta_{\text{вер}}$	$\delta_{\text{счет}}$
(а)	0,256	0,103	0,048
(б)	0,016	0,027	0,016

Вернемся к примеру из п. 8.3. По значениям, приведенным в табл. 1 и 2, можно приближенно сосчитать дисперсии $\mathrm{D}\eta$ для обоих методов расчета. Соответствующая расчетная формула приведена в п. 6.1 **).

В табл. 3 для обоих методов расчета указаны приближенные значения дисперсий $\mathrm{D}\eta$, сосчитанные по ним вероятные ошибки $\delta_{\text{вер}}$, а также фактические абсолютные ошибки, полученные при расчете $\delta_{\text{счет}}$.

Мы видим, что $\delta_{\text{счет}}$ действительно имеют тот же порядок, что $\delta_{\text{вер}}$.

---

*) Определение вероятной ошибки см. в п. 9.7.

**) Для метода (а):

$$\mathrm{D}\eta \approx \frac{\pi^2}{9\cdot 4}\left[\sum_1^{10}(\sin\xi_j)^2 - \frac{1}{10}\left(\sum_1^{10}\sin\xi_j\right)^2\right] = \frac{\pi^2}{36}(4{,}604 - 3{,}670) = 0{,}256.$$

Для метода (б):

$$\mathrm{D}\eta \approx \frac{\pi^4}{9\cdot 64}\left[\sum_1^{10}\left(\frac{\sin\xi_j}{\xi_j}\right)^2 - \frac{1}{10}\left(\sum_1^{10}\frac{\sin\xi_j}{\xi_j}\right)^2\right] = \frac{\pi^4}{576}(6{,}875 - 6{,}777) = 0{,}016.$$

ДОБАВЛЕНИЕ

§ 9. Доказательства некоторых предложений

В этом параграфе приведены доказательства некоторых утверждений, высказанных в предыдущих параграфах, которые кажутся нам несколько громоздкими для популярного изложения или предполагают больше знаний по теории вероятностей.

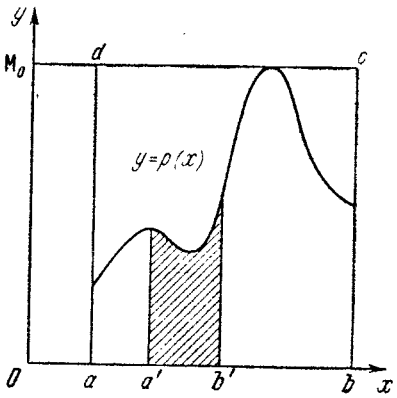

Рис. 27.

9.1. Обоснование метода Неймана для разыгрывания случайной величины (п. 4.3). Случайная точка Г равномерно распределена в прямоугольнике $abcd$ (рис. 27), площадь которого равна $M_0(b-a)$*). Вероятность того, что точка Г окажется под кривой $y=p(x)$ и не будет отброшена, равна отношению площадей

$$\frac{\int_a^b p(x)\,dx}{M_0(b-a)} = \frac{1}{M_0(b-a)}.$$

*) Ср. п. 9.3.

А вероятность того, что точка Г окажется под кривой $y=p(x)$ на интервале $a'<x<b'$, также равна отношению площадей

$$\frac{\int_{a'}^{b'} p(x)\,dx}{M_0(b-a)}.$$

Следовательно, среди всех отобранных нами значений ξ доля значений, попавших в интервал (a', b'), равна частному

$$\frac{\int_{a'}^{b'} p(x)\,dx}{M_0(b-a)} : \frac{1}{M_0(b-a)} = \int_{a'}^{b'} p(x)\,dx,$$

что и требовалось доказать.

9.2. Плотность распределения величины $\zeta'=a+\sigma\zeta$ (п. 4.4). Предполагается, что величина ζ нормальна с математическим ожиданием $\mathsf{M}\zeta=0$ и дисперсией $\mathsf{D}\zeta=1$, так что ее плотность

$$p_\zeta(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Чтобы вычислить плотность распределения величины ζ', выберем два произвольных числа $x_1<x_2$ и вычислим вероятность

$$P\{x_1<\zeta'<x_2\}=P\{x_1<a+\sigma\zeta<x_2\}=$$
$$=P\left\{\frac{x_1-a}{\sigma}<\zeta<\frac{x_2-a}{\sigma}\right\}.$$

Следовательно,

$$P\{x_1<\zeta'<x_2\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{(x_1-a)/\sigma}^{(x_2-a)/\sigma} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

В последнем интеграле сделаем замену переменной $x'=a+\sigma x$. Получим

$$P\{x_1<\zeta'<x_2\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x'-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx',$$

откуда следует (ср. (14)) нормальность величины ζ' с параметрами $M\zeta'=a$, $D\zeta'=\sigma^2$.

9.3. Равномерное распределение точек (γ', γ'') в квадрате (п. 4.5). Так как координаты точки (γ', γ'') независимы, то плотность ее $p(x, y)$ равна произведению плотностей

$$p(x, y)=p_{\gamma'}(x)\,p_{\gamma''}(y).$$

Каждая из этих плотностей тождественно равна 1. Значит, $p(x, y)\equiv 1$ (при $0<x<1$ и $0<y<1$). А это и означает равномерность распределения точки (γ', γ'') в единичном квадрате.

9.4. Выбор случайного направления (п. 7.1). Условимся задавать направление единичным вектором, выходящим из начала координат. Концы таких векторов расположены на поверхности единичной сферы. Слова «любое направление одинаково вероятно» означают, что конец вектора представляет собой случайную точку Ω, равномерно распределенную на поверхности этой сферы: вероятность того, что Ω окажется в любом элементе поверхности dS, равна $dS/4\pi$.

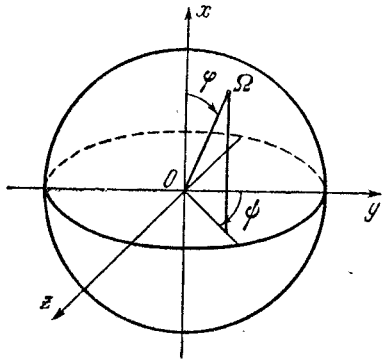

Рис. 28.

Выберем на поверхности сферы сферические координаты (φ, ψ) с полярной осью Ox (рис. 28). Тогда

$$dS=\sin\varphi\,d\varphi\,d\psi, \tag{36}$$

причем $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$, $0\leqslant\psi<2\pi$.

Так как координаты φ и ψ независимы, то плотность точки (φ, ψ) равна произведению $p(\varphi, \psi)=p_\varphi(\varphi)\,p_\psi(\psi)$. Из этого равенства, соотношения (36) и соотношения

$$p(\varphi, \psi)\,d\varphi\,d\psi=dS/4\pi$$

вытекает, что

$$p_\varphi(\varphi)\,p_\psi(\psi)=\frac{\sin\varphi}{4\pi}. \tag{37}$$

Проинтегрируем это выражение по ψ от 0 до 2π. Принимая во внимание условие нормировки $\int_0^{2\pi} p_\psi(\psi)\,d\psi = 1$, получим, что

$$p_\varphi(\varphi) = \frac{\sin\varphi}{2}. \tag{38}$$

Разделив (37) на (38) почленно, найдем, что

$$p_\psi(\psi) = \frac{1}{2\pi}. \tag{39}$$

Очевидно, ψ равномерно распределена в интервале $(0, 2\pi)$ и формула для разыгрывания ψ запишется так:

$$\psi = 2\pi\gamma. \tag{40}$$

Формулу для разыгрывания φ найдем при помощи уравнения (23):

$$(1/2)\int_0^{\varphi} \sin x\,dx = \gamma,$$

откуда

$$\cos\varphi = 1 - 2\gamma. \tag{41}$$

Формулы (40) и (41) позволяют нам выбирать (разыгрывать) случайное направление. Конечно, значения γ в этих формулах должны быть разными.

Формула (41) отличается от последней формулы п. 7.1 только тем, что вместо γ в ней стоит $1-\gamma$, а эти величины имеют одинаковое распределение.

9.5. Преимущество способа расчета с весами (п. 7.3). Введем случайные величины ν и ν', равные количеству (весу) прошедших сквозь пластинку нейтронов, полученному при расчете одной траектории методом п. 7.2 и методом п. 7.3.

По физическому смыслу задачи

$$\mathsf{M}\nu = \mathsf{M}\nu' = p^+.$$

Так как ν может принимать только два значения, 0 и 1, то распределение ν задается таблицей

$$\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p^+ & 1-p^+ \end{pmatrix}.$$

Приняв во внимание, что $\nu^2=\nu$, нетрудно вычислить, что $\mathsf{D}\nu = p^+ - (p^+)^2$.

Легко видеть, что величина ν' может принимать бесконечное число значений: $w_0=1$, w_1, w_2, ..., w_k, ..., а также значение 0. Поэтому ее распределение задается таблицей

$$\nu' = \begin{pmatrix} w_0 & w_1 & w_2 & \dots & w_k & \dots & 0 \\ q_0 & q_1 & q_2 & \dots & q_k & \dots & q \end{pmatrix}.$$

Значения q_i нас интересовать не будут, так как в любом случае можно записать выражение для дисперсии

$$\mathsf{D}\nu' = \sum_{k=0}^{\infty} w_k^2 q_k - (p^+)^2.$$

Заметив, что все $w_k \leqslant 1$ и что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} w_k q_k = \mathsf{M}\nu' = p^+$, получим неравенство $\mathsf{D}\nu' \leqslant p^+ - (p^+)^2 = \mathsf{D}\nu$.

Тот факт, что дисперсия ν' всегда меньше, чем дисперсия ν, показывает, что метод п. 7.3 для расчета p^+ всегда лучше, чем метод п. 7.2.

Такой же вывод можно сделать о расчете p^-, а при не слишком большом поглощении — и о расчете p^0.

9.6. Наилучший выбор ξ (п. 8.2). В п. 8.2 получено выражение для дисперсии $\mathsf{D}\eta$. Чтобы найти минимум этого выражения при всевозможных выборах $p_\xi(x)$, воспользуемся хорошо известным в анализе неравенством

$$\left[\int_a^b |u(x)\,v(x)|\,dx\right]^2 \leqslant \int_a^b u^2(x)\,dx \cdot \int_a^b v^2(x)\,dx.$$

Положим $u = g(x)/\sqrt{p_\xi(x)}$, а $v = \sqrt{p_\xi(x)}$; тогда из этого неравенства получим

$$\left[\int_a^b |g(x)|\,dx\right]^2 \leqslant \int_a^b \frac{g^2(x)}{p_\xi(x)}\,dx \cdot \int_a^b p_\xi(x)\,dx = \int_a^b \frac{g^2(x)}{p_\xi(x)}\,dx.$$

Значит,

$$\mathsf{D}\eta \geqslant \left[\int_a^b |g(x)|\,dx\right]^2 - I^2. \qquad (42)$$

Остается доказать, что нижняя граница достигается тогда, когда $p_\xi(x)$ пропорциональна $|g(x)|$.

Пусть

$$p_\xi(x) = \frac{|g(x)|}{\int_a^b |g(x)|\,dx}. \qquad (43)$$

Нетрудно вычислить, что при такой плотности $p_\xi(x)$

$$\int_a^b [g^2(x)/p_\xi(x)]\,dx = \left[\int_a^b |g(x)|\,dx\right]^2,$$

и дисперсия $\mathsf{D}\eta$ действительно равна правой части (42).

Заметим, что выбрать «наилучшую» плотиость (43) для расчета практически невозможно: для этого нужно знать значение интеграла $\int_a^b |g(x)|\,dx$. А вычисление последнего интеграла представляет собой задачу, равноценную стоящей перед нами задаче о вычислении интеграла $\int_a^b g(x)\,dx$. Поэтому мы ограничились рекомендацией, указанной в п. 8.2.

9.7. Определение вероятной ошибки (п. 8.4). Пусть ζ — нормальная случайная величина, определенная в п. 2.3. Нетрудно вычислить, что, каковы бы ни были a и σ при $r = 0{,}675\,\sigma$,

$$\int_{a-r}^{a+r} p_\zeta(x)\,dx = 0{,}5.$$

Отсюда вытекает, что

$$P\{|\zeta - a| < r\} = P\{|\zeta - a| > r\} = 0{,}5,$$

то есть отклонение большее, чем r, и отклонение меньшее, чем r, одинаково вероятны. Поэтому величина r называется *вероятной ошибкой* случайной величины ζ.

В п. 8.1 мы вычисляем приближенно нормальную величину $\rho = (1/N)(\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_N)$. Ее математическое ожидание $a \equiv \mathsf{M}\rho = I$, а дисперсия $\sigma^2 \equiv \mathsf{D}\rho = \mathsf{D}\eta/N$. Поэтому вероятная ошибка величины ρ приближенно равна $0{,}675\sqrt{\mathsf{D}\eta/N}$.

Таблица А. 400 случайных цифр *)

86 515	90 795	66 155	66 434	56 558	12 332	94 377	57 802
69 186	03 393	42 502	99 224	88 955	53 758	91 641	18 867
41 686	42 163	85 181	38 967	33 181	72 664	53 807	00 607
86 522	47 171	88 059	89 342	67 248	09 082	12 311	90 316
72 587	93 000	89 688	78 416	27 589	99 528	14 480	50 961
52 452	42 499	33 346	83 935	79 130	90 410	45 420	77 757
76 773	97 526	27 256	66 447	25 731	37 525	16 287	66 181
04 825	82 134	80 317	75 120	45 904	75 601	70 492	10 274
87 113	84 778	45 863	24 520	19 976	04 925	07 824	76 044
84 754	57 616	38 132	64 294	15 218	49 286	89 571	42 903

Таблица Б. 88 нормальных величин **)

0,2005	1,1922	—0,0077	0,0348	1,0423	—1,8149	1,1803	0,0033
1,1609	—0,6690	—1,5893	0,5816	1,8818	0,7390	—0,2736	1,0828
0,5864	—0,9245	0,0904	1,5068	—1,1147	0,2776	0,1012	—1,3566
0,1425	—0,2863	1,2809	0,4043	0,6379	—0,4428	—2,3006	—0,6446
0,9516	—1,7708	2,8854	0,4686	1,4664	1,6852	—0,9690	—0,0831
—0,5863	0,8574	—0,5557	0,8115	—0,2676	—1,2496	—1,2125	1,3846
1,1572	0,9990	—0,1032	0,5405	—0,6022	0,0093	0,2119	—1,4647
—0,4428	—0,5564	—0,5098	—1,1929	—0,0572	—0,5061	—0,1557	—1,2384
—0,3924	1,7981	0,6141	—1,3596	1,4943	—0,4406	—0,2033	—0,1316
0,8319	0,4270	—0,8888	0,4167	—0,8513	1,1054	1,2237	—0,7003
0,9780	—0,7679	0,8960	0,5154	—0,7165	0,8563	—1,1630	1,8800

*) Случайные цифры имитируют значения случайной величины с распределением (22) (см. п. 3.1).

**) Нормальные величины имитируют значения нормальной (гауссовской) случайной величины ζ с параметрами $a=0$, $\sigma=1$.

ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

Наиболее полное изложение вопросов, связанных с методом Монте-Карло, имеется в книгах:

[1] Бусленко Н. П., Шрейдер Ю. А., Метод статистических испытаний (Монте-Карло) и его реализация в цифровых машинах, Физматгиз, 1961.

[2] Бусленко Н. П., Голенко Д. И., Соболь И. М., Срагович В. Г., Шрейдер Ю. А., Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло), Физматгиз, СМБ, 1962.

Статьи по многим вопросам, из числа затронутых в настоящей книжке, имеются в энциклопедии:

[3] Автоматизация производства и промышленная электроника, тт. 1—4, БСЭ, 1962—1965.

Можно указать также некоторые книги, посвященные отдельным вопросам:

К § 4

[4] Голенко Д. И., Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на *ЭВМ*, «Наука», 1965.

К § 5

[5] Бусленко Н. П., Математическое моделирование производственных процессов на цифровых вычислительных машинах, «Наука», 1964.

К § 6

[6] Туркельтауб Р. М., Методы исследования точности и надежности аппаратуры, «Энергия», 1966.

По вопросам, относящимся к §§ 7, 8, см. книгу [2].

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Введение 5

§ 1. Общее представление о методе 5

Глава 1. **Моделирование случайных величин** 9

§ 2. Случайные величины 9
§ 3. Получение случайных величин на *ЭВМ* 20
§ 4. Преобразования случайных величин 25

Глава 2. **Примеры применения метода Моите-Карло** 33

§ 5. Расчет системы массового обслуживания 33
§ 6. Расчет качества и надежности изделий 38
§ 7. Расчет прохождения нейтронов сквозь пластинку . . 44
§ 8. Вычисление определенного интеграла 51

Добавление 56

§ 9. Доказательства некоторых предложений 56

Таблицы 62

Литературные указания 63

Цена 10 коп.

№ 2325

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вып. 1. **А. И. Маркушевич.** Возвратные последовательности.
Вып. 2. **И. П. Натансон.** Простейшие задачи на максимум и минимум.
Вып. 3. **И. С. Соминский.** Метод математической индукции.
Вып. 4. **А. И. Маркушевич.** Замечательные кривые.
Вып. 5. **П. П. Коровкин.** Неравенства.
Вып. 6. **Н. Н. Воробьев.** Числа Фибоначчи.
Вып. 7. **А. Г. Курош.** Алгебраические уравнения произвольных степеней.
Вып. 8. **А. О. Гельфонд.** Решение уравнений в целых числах.
Вып. 9. **А. И. Маркушевич.** Площади и логарифмы.
Вып. 10. **А. С. Смогоржевский.** Метод координат.
Вып. 11. **Я. С. Дубнов.** Ошибки в геометрических доказательствах.
Вып. 12. **И. П. Натансон.** Суммирование бесконечно малых величин.
Вып. 13. **А. И. Маркушевич.** Комплексные числа и конформные отображения.
Вып. 14. **А. И. Фетисов.** О доказательствах в геометрии.
Вып. 15. **И. Р. Шафаревич.** О решении уравнений высших степеней.
Вып. 16. **В. Г. Шерватов.** Гиперболические функции.
Вып. 17. **В. Г. Болтянский.** Что такое дифференцирование?
Вып. 18. **Г. М. Миракьян.** Прямой круговой цилиндр.
Вып. 19. **Л. А. Люстерник.** Кратчайшие линии.
Вып. 20. **А. М. Лопшиц.** Вычисление площадей ориентированных фигур.
Вып. 21. **Л. И. Головина** и **И. М. Яглом.** Индукция в геометрии.
Вып. 22. **В. Г. Болтянский.** Равновеликие и равносоставленные фигуры.
Вып. 23. **А. С. Смогоржевский.** О геометрии Лобачевского.
Вып. 24. **Б. И. Аргунов** и **Л. А. Скорняков.** Конфигурационные теоремы.
Вып. 25. **А. С. Смогоржевский.** Линейка в геометрических построениях.
Вып. 26. **Б. А. Трахтенброт.** Алгоритмы и машинное решение задач.
Вып. 27. **В. А. Успенский.** Некоторые приложения механики к математике
Вып. 28. **Н. А. Архангельский** и **Б. И. Зайцев.** Автоматические цифровые машины.
Вып. 29. **А. Н. Костовский.** Геометрические построения одним циркулем.
Вып. 30. **Г. Е. Шилов.** Как строить графики.
Вып. 31. **А. Г. Дорфман.** Оптика конических сечений.
Вып. 32. **Е. С. Вентцель.** Элементы теории игр.
Вып. 33. **А. С. Барсов.** Что такое линейное программирование.
Вып. 34. **Б. Е. Маргулис.** Системы линейных уравнений.
Вып. 35. **Н. Я. Виленкин.** Метод последовательных приближений.
Вып. 36. **В. Г. Болтянский.** Огибающая.
Вып. 37. **Г. Е. Шилов.** Простая гамма (устройство музыкальной шкалы)
Вып. 38. **Ю. А. Шрейдер.** Что такое расстояние?
Вып. 39. **Н. Н. Воробьев.** Признаки делимости.
Вып. 40. **С. В. Фомин.** Системы счисления.
Вып. 41. **Б. Ю. Коган.** Приложение механики к геометрии
Вып. 42. **Ю. И. Любич** и **Л. А. Шор.** Кинематический метод в геометрических задачах.
Вып. 43. **В. А. Успенский.** Треугольник Паскаля.
Вып. 44. **И. Я. Бакельман.** Инверсия.
Вып. 45. **И. М. Яглом.** Необыкновенная алгебра.